ANUL XXII. MARTIE 1942 No 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE" (URMARE).
2. **O. N. TINO**: PROPRIETATI DE GEOMETRIE AVAND ORIGINA IN APLICATIILE „COORDONATELOR ROMBICE" (URMARE).
3. NOTE MATEMATICE: 1, 2, 3.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1647, 1688, 1689, 1691, 1855, 1856.
6. PROBLEME PROPUSE: 2018 — 2025.
7. INFORMATIUNI.

38675

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie, să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Din cauza scumpirei hârtiei și a tiparului suntem obligați a mări costul abonamentului pentru anul 1942 la 180 (una sută optzeci) lei.

R. M. T. aduce vii mulțumiri D-lui Profesor CORNELIU N. POPESCU pentru suma 1000 (una mie) lei. D-sa între altele ne scrie :

„V'am expediat astăzi prin mandat postal suma de lei 1000 (una mie), drept contribuție EXCEPȚIONALĂ de membru la R. M. T. pe anul: 15 Martie 1942—15 Februarie 1943, cu promisiunea de a o menține în viitor.

Fac aceasta cu o deosebită plăcere, pentru o scumpă revistă de matematici, la care am debutat de pe băncile liceului, etc."

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ștefan Nadașan** (Laboratorul de Rezistența Materialelor), Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii și cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN, Școala Politechnică, Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broșate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — No. 1 TIMISOARA, MARTIE 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE"

DE

V. ALACI.

(urmare)

22. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație rombică*

(49) $$r = a\,cp\,\theta, \qquad a > 0,$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi = 45^0$.

Prima soluție. Observăm întâi că r este pozitiv numai în intervalele închise $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ și rămâne neschimbat înlocuind θ prin $-\theta$.

Rezultă de aci simetria configurației cerute față de axa $x'x$, într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$, a cărui origină fie O.

Vom construi dar configurația (49) pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ și o vom întregi cu simetrica sa față de axa $x'x$.

Pentru aceasta procedăm astfel:

Luăm pe Ox, Oy *segmentele*

$$OA = OB = a,$$

ducem raza variabilă OM (M *pe* AB), *proectăm ortogonal* M *pe axa* $x'x$ *în* M_1, *iar din* M_1 *ducem în primul cadran semi-dreapta* $M_1\alpha$ *astfel ca*

$$\sphericalangle\, O M_1 \alpha = 45^0.$$

Punctul P, *intersecția dreptelor* (OM, $M_1\alpha$) *aparține configurației cerute,* (fig. 14).

Această afirmare o justificăm arătând că, *coordonatele rombice* ale lui P, care pe figură sunt

$$r = OM_1, \qquad \theta = \sphericalangle\, xOP, \qquad 45^0 = \varphi$$

satisfac *ecuația rombică* (49).

În adevăr, aplicând triunghiului dreptunghic OM_1M *teorema I-a* de la triunghiurile dreptunghice din *„Trig. patratică"*, avem

$$OM_1 = (OM_1 + M_1M)\,cp\,\theta = a\,cp\,\theta,$$

sau

$$r = a\,cp\,\theta.$$

tocmai ecuația (49). Punctul P a fost astfel bine determinat.

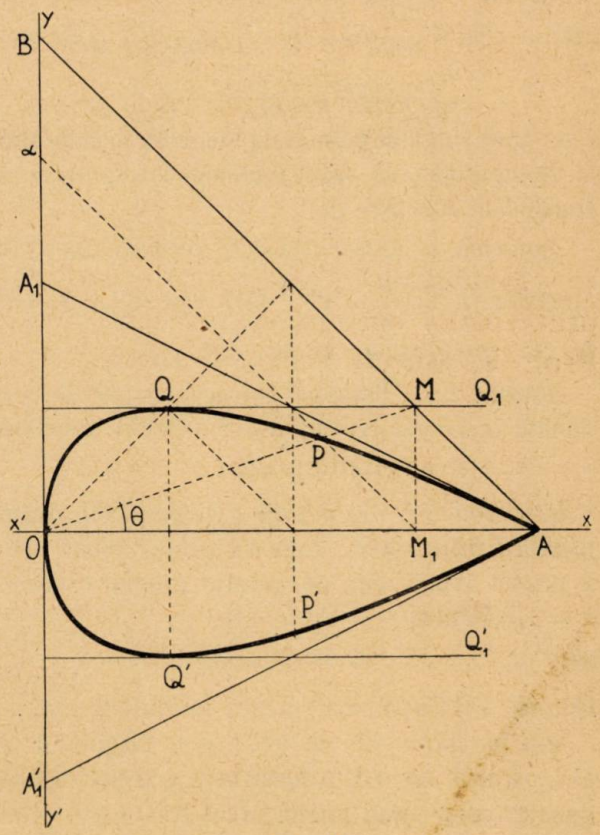


Fig. 14.

Variind unghiul θ, obținem analog lui P alte puncte ale configurației cerute, care unite ne dau arcul APO, arc care complectat cu simetricul său față de axa $x'x$, ne dă în întregime configurația (49)

Configurația cerută este formată din ovalul alungit A P O P′ A, *având* A *ca punct unghiular.*

Observare. Pentru a trasa mai precis configurația (49), putem determina în fiecare punct al ei și tangenta corespunzătoare. În acest scop folosim formula (20), care în cazul nostru și pentru primul cadran devine

$$\operatorname{cotg} V = \frac{r'}{r} - \operatorname{cotg}(\theta + 45^0). \tag{50}$$

Cum derivata lui r din (49), pentru primul cadran este

$r' = -a(sp^2\theta + cp^2\theta)$, („*Trig. patratică*“, formula (50)), relația (50) devine

$$\operatorname{cotg} V = -\frac{sp^2\theta + cp^2\theta}{cp\,\theta} - \operatorname{cotg}(\theta + 45^0).$$

De aci, pentru $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, deducem

$$|\operatorname{cotg} V|_{\theta=0} = -2, \quad |\operatorname{cotg} V|_{\theta=45^0} = -1, \tag{51}$$

$$|\operatorname{cotg} V|_{\theta=90^0} = -\infty.$$

V fiind unghiul format de tangenta într'un punct al configurației cu raza vectoare corespunzătoare, conchidem din (51) că:

Tangenta în A *este* A A$_1$ (A$_1$ *mijlocul lui* O B); *tangenta în* Q$(\frac{a}{2}, 45^0; 45^0)$ *este* Q Q$_1$ *paralelă la* $x'x$; *tangenta în* O *este axa* $y'y$.

Soluția 2-a. Transpunem ecuația (49) în coordonate rectangulare, scriind-o à priori sub forma

$$r^2 = a\,r\,cp\,\theta.$$

Înlocuind aci, $r\,cp\,\theta$ prin x și pe r din primul membru prin $x + y$, conform primei relații (1′) și a primei relații din (9) pentru primul cadran și $k = 1$, obținem

$$(x + y)^2 = a\,x, \tag{49′}$$

valabilă evident numai pentru primul cadran.

Din parabola (49′) ce trece prin origină și are axa paralelă cu a 2-a bisectoare a axelor de coordonate, vom reține numai arcul A P O din primul cadran.

Din cauza simetriei configurației (49) *față de* $x'x$, *întregim arcul* A P O *cu simetricul său față de* $x'x$ *și obținem același oval alungit* A P O P′ A *din prima soluție.*

Observare. Ar fi interesantă o demonstrație pur geometrică, pentru a arătă că locul punctului P definit prin construcția expusă, este o parabolă.

23. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație rombică*

$$r = a\,cp^2\theta, \qquad a > 0, \tag{52}$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi = 90^0$.

Prima soluție. Schimbând θ în $-\theta$, sau în $\pi \mp \theta$, observăm din (52) că r rămâne neschimbat, de unde rezultă simetria configurației cerute față de axele rectangulare $x'x$, $y'y$ și origina O.

Este suficient dar, a construi configurația (52) numai pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ și a o întregi cu simetricele față de axe și origina lor.

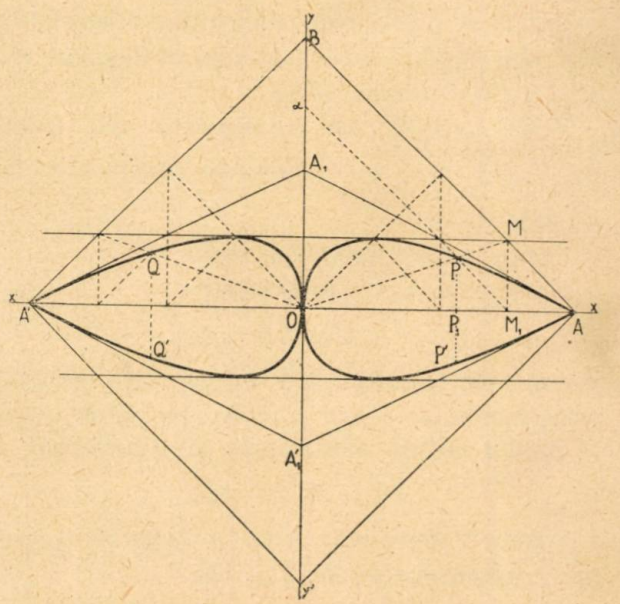
Pentru aceasta procedăm astfel:

Luăm pe axele O x, O y *segmentele*

$$OA = OB = a,$$

ducem raza variabilă O M (M *pe* A B), *proiectăm ortogonal* M *pe axa* $x'x$ *în* M$_1$ *și din* M$_1$ *ducem în primul cadran dreapta* M$_1\alpha$ *astfel ca*

$$\sphericalangle\, O M_1 \alpha = 45^0.$$



Flg. 15.

Punctul P, *intersecția semi-dreptelor* (O M, M$_1\alpha$) *aparține configurației cerute,* (fig. 15).

Pentru a motiva această afirmare vom arătă că, *coordonatele rombice* ale lui P, care pe figură sunt

$$r = OP_1, \qquad \theta = \sphericalangle xOP, \qquad 90^0 = \sphericalangle OP_1P$$

satisfac ecuația (52). În adevăr, în triunghiurile dreptunghice OP_1P și OM_1M aplicând *teorema I-a* de la triunghiurile dreptunghice din „*Trig. patratică*", avem:

$$OP_1 = (OP_1 + P_1P)\, cp\,\theta = OM_1\, cp\,\theta$$

$$OM_1 = (OM_1 + M_1M)\, cp\,\theta = a\, cp\,\theta.$$

Înmulțind aceste relații obținem

$$OP_1 = a\, cp^2\,\theta,$$

sau

$$r = a\, cp^2\,\theta$$

tocmai ecuația (52). Punctul P a fost astfel bine determinat.

Variind unghiul θ, obținem analog lui P alte puncte ale configurației cerute, care unite dau arcul APO. În particular pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, P coïncide cu orice punct al semi-axei Oy. Întregind arcul APO și pe Oy cu simetricele lor față de axe și origina O, conchidem:

Configurația de ecuație rombică (52) *și unghiu auxiliar* $\varphi = 90^0$ *se compune din ovalele alungite* $APOP'A$, $A'QOQ'A'$ *cu* A, A' *puncte unghiulare, precum și din axa* $y'y$.

Întreaga configurație este cuprinsă în interiorul rombului $AA_1A'A_1'$.

Soluția 2 a. Să transpunem *ecuația rombică* (52) în *coordonate rectangulare.*

Vom observa întâi că formulele (9), în cazul $\varphi = 90^0$ (deci $k = \operatorname{tg}\varphi = \infty$), devin

$$(9') \qquad \boxed{\begin{array}{c} r = \pm x \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \end{array}},$$

și aceste formule le vom folosi curent în cele ce urmează.

În (9') se va lua înaintea lui x semnul + pentru cadranele I, IV și semnul — pentru cadranele II, III.

Pentru primul cadran, din a 2-a relație (9') deducem

$$(53) \qquad cp\,\theta = \frac{x}{x+y},$$

fiindcă $sp\,\theta + cp\,\theta = 1$, astfel că *ecuația rombică* (52) în baza primei relații din (9') și a relației (53) devine

$$x = \frac{a\,x^2}{(x+y)^2},$$

sau

$$(52') \qquad \begin{cases} (x+y)^2 = a\,x \\ x = 0, \end{cases}$$

valabile evident numai pentru primul cadran. Vom reține astfel, din prima curbă care este o parabolă numai arcul APO, iar din dreapta $x = 0$ numai semi-dreapta Oy.

Întregind părțile aflate cu simetricele lor față de axe și origina O, *obținem aceiași configurație ca în prima soluție.*

Observare. *Configurațiile rombice* $r = a\, cp\,\theta$ și $r = a\, cp^2\,\theta$ având unghiurile auxiliare respectiv $\varphi = 45^0$ și $\varphi = 90^0$, raportate la același sistem de axe rectangulare, au comun ovalul alungit $APOP'A$.

24. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație rombică*

$$(54) \qquad r = a\, sp\, 2\theta, \qquad a > 0,$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi = 90^0$.

Prima soluție. Observăm că r este pozitiv numai pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ și $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$, iar înlocuind θ prin $\pi + \theta$, r rămâne neschimbat. Aceasta înseamnă că, configurația (54) este simetrică față de origină, astfel că o vom construi întâi în primul cadran și o vom întregi apoi cu simetrica ei față de origine. Observând încă că, r rămâne neschimbat când înlocuim θ prin $\frac{\pi}{2} - \theta$, vom face următoarea construcție.

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *luăm pe* Ox, Oy' *segmentele*

$$OA = OB = a,$$

ducem prin O *în al 4-lea cadran o semi-dreaptă variabilă* OM (M *pe* AB) *și tot din* O, *ducem în primul cadran semi-dreptele* $O\alpha$, $O\beta$ *astfel ca*

$$\sphericalangle AO\alpha = \frac{\sphericalangle BOM}{2}, \qquad \sphericalangle AO\beta = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle AO\alpha.$$

Intersecţiile P, Q *ale semi-dreptelor* O α, O β *cu perpendiculara pe* $x'x$ *ce trece prin* M, *aparţin configuraţiei* (54), (fig. 16).

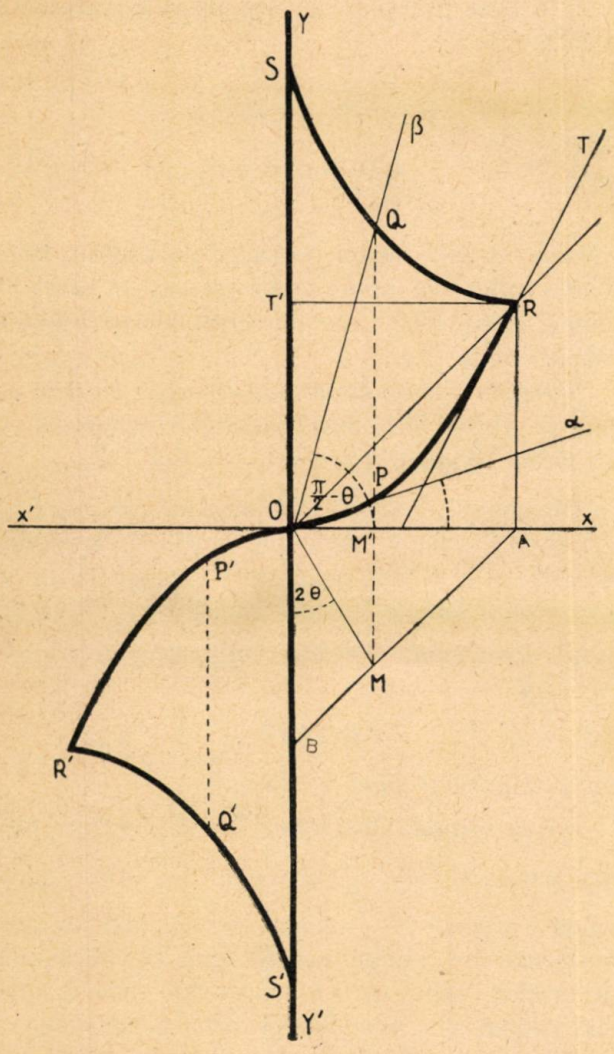


Fig. 16.

Vom arăta în acest scop că, *coordonatele rombice* ale punctelor P, Q satisfac ecuaţia (54).

În adevăr, însemnând cu M' intersecţia ($x'x$, MP) şi notând

$$\sphericalangle BOM = 2\theta,$$

deci

$$\sphericalangle AO\alpha = \theta, \qquad \sphericalangle AO\beta = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

se observă pe figură că, *coordonatele rombice* ale ui P şi Q sunt respectiv

$$r = OM', \quad \theta = \sphericalangle xOP, \qquad 90^0 = \varphi$$

(55)

$$r' = OM', \quad \theta' = \sphericalangle xOQ = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad 90^0 = \varphi',$$

astfel că, aplicând triunghiului dreptunghic O M' M *teorema I-a* dela triunghiurile dreptunghice din „*Trig. patratică*“, obţinem

$$OM' = (OM' + M'M)\, cp\left(\frac{\pi}{2} - \overset{\frown}{BOM}\right) = a\, sp\, 2\theta,$$

sau

(56) $$r = a\, sp\, 2\theta,$$

tocmai ecuaţia (54). Punctul P a fost astfel bine determinat.

Cum din (55) rezultă

$$r = r', \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - \theta', \qquad \varphi = \varphi',$$

relaţia (56) se mai poate scri

$$r' = a\, sp\, 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = a\, sp\, 2\theta',$$

ceeace înseamnă că şi *coordonatele rombice* ale punctului Q satisfac ecuaţia (54). Prin urmare şi punctul Q a fost bine determinat.

Variind θ, avem alte puncte ale configuraţiei (54). Unind punctele de felul lui P şi cele de felul lui Q, obţinem ramurile O P R şi R Q S.

Punctul de ramificaţie R, corespunde evident lui $\theta = 45^0$ şi tangentele în R la cele două ramuri se află cu ajutorul formulei (20), care pentru primele două cadrane şi $\varphi = 90^0$, devine

(57) $$\operatorname{cotg} V = \pm 2\,\frac{sp^2 2\theta + cp^2 2\theta}{sp\, 2\theta} + \operatorname{tg}\theta,$$

fiindcă

$$r' = \pm 2a\,(sp^2 2\theta + cp^2 2\theta).$$

Aci semnul + corespunde primului cadran, iar semnul — cadranului al 2-lea.

Din (57) deducem

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left|\operatorname{cotg} V\right|_{\theta = 45^0 - \varepsilon} = 3, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \left|\operatorname{cotg} V\right|_{\theta = 45^0 + \varepsilon} = -1.$$

V fiind unghiul făcut de tangenta în R a configuraţiei (54) cu raza O R, rezultă că tangenta R T la ramura O P R are coeficientul unghiular $\frac{1}{3}$ faţă de O R, iar tangenta R T' tot în R însă la ramura R Q S are coeficientul unghiular — 1 faţă de O R, deci este paralelă cu axa $x'x$.

Vom mai observa că pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, orice punct al semi-axei Oy aparține configurației (54) și deci punctele O, S sunt și ele puncte de ramificație, tangentele corespunzătoare în aceste puncte putându-se afla analog ca pentru R. Construim și simetricele părților aflate față de origine.

Concentrând rezultatele aflate, conchidem:

Configurația (54) *este formată din arcele* O P R, R Q S *și semi-dreapta* Oy, *din primul cadran, precum și din arcele* O P′ R′, R′ Q′ S′ *și semi-dreapta* Oy' *din cadranul al 3-lea.*

Relevăm configurația curioasă din figura 16.

Soluția 2-a. Să transpunem *ecuația rombică* (54) în *coordonate rectangulare*, numai pentru primul cadran, din cauza simetriei arătată în prima soluție.

Pentru aceasta folosim întâi formulele de înmulțire (28) și (28′) din „*Trig. patratică*“, p. 23, în virtutea cărora ecuația (54) devine

$$(58)\quad \begin{cases} r = \dfrac{2a\,sp\,\theta\,cp\,\theta}{1 - 2\,sp^2\theta}, & \text{pentru} \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \\ r = \dfrac{2a\,sp\,\theta\,cp\,\theta}{1 - 2\,cp\,\theta}, & \text{pentru} \quad \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ținând apoi seamă de relațiile de transformare (9′), ecuațiile (58) devin respectiv

$$(59)\qquad x = \frac{2axy}{(x+y)^2 - 2y^2}, \qquad x = \frac{2axy}{(x+y)^2 - 2x^2},$$

fiindcă din a 2-a relație (9′) deducem pentru primul cadran

$$sp\,\theta = \frac{y}{x+y}, \qquad cp\,\theta = \frac{x}{x+y}.$$

Ecuațiile (59) care au loc simultan și care se mai pot scri încă

$$(54')\quad \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 - 2ay = 0 \\ y^2 + 2xy - x^2 - 2ay = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

sunt valabile, prima pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, a 2-a pentru $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ și a 3-a pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Din prima iperbolă vom reține dar arcul O P R, din a 2-a arcul R Q S (fiindcă $0 \leq x \leq a$), iar din axa $y'y$ vom reține numai semi-dreapta Oy.

Construim și simetricele părților aflate,

Găsim astfel aceiași configurație ca în prima soluție, formată din triunghiu mixtiliniu O R S *și prelungirea* Sy, *la care se adaogă triunghiul mixtilinia* O R′ S′ *și prelungirea* S′ y'.

Observare importantă. Dacă în construcția din prima soluție îndepărtăm restricția impusă de structura *ecuației rombice* (54) ca dreapta O M să varieze numai în cadranul al 4-lea, atunci putem enunța o problemă interesantă de *geometrie analitică* sau *geometrie pură*, anume:

Problemă. *Într'un sistem de axe rectangulare* $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O *se iau pe* Ox, Oy' *segmentele*

$$OA = OB = a$$

și din O *se duce o dreapta variabilă ce întâlnește în* M *dreapta* A B.

Tot din O *se duc dreptele* Oα, Oβ *astfel ca*

$$\sphericalangle\, x\,O\,\alpha = \sphericalangle\, y\,O\,\beta = \frac{\sphericalangle\, B\,O\,M}{2},$$

unghiurile B O M, xOα *măsurându-se în senz pozitiv, iar unghiul* yOβ *în senz contrar.*

Se cere locul punctelor P, Q *intersecțiile perpendicularei în* M *pe* $x'x$ *cu dreptele* Oα, Oβ.

Soluție analitică. Locul lui P. Fie (x, y) coordonatele rectangulare ale lui P, M′ intersecția ($x'x$, M P) și alegem ca parametru variabil

$$\sphericalangle\, B\,O\,M = 2\theta, \qquad \text{deci} \qquad x\,O\,P = \theta.$$

Punctul P este intersecția dreptelor Oα, M M′ de ecuații

$$(60)\quad \begin{cases} y = x \operatorname{tg} \theta \\ x = \dfrac{a}{1 + \operatorname{cotg} 2\theta}, \end{cases}$$

ecuația 2-a deducându-să din figură, observând că

$$x = OM' = OA - M'A = a - M'M = a - x \operatorname{cotg} 2\theta.$$

Să eliminăm θ între ecuațiile (60), eliminare ce se face scriind că avem succesiv

$$x = \frac{a}{1 + \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{2 \operatorname{tg}\theta}} = \frac{a}{1 + \dfrac{x^2 - y^2}{2xy}}.$$

De aci deducem

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2xy - y^2 - 2ay = 0. \end{cases}$$

Locul lui P *este astfel format din axa* $y'y$ *şi iperbola* $(x+y)^2-2y^2=2ay$.

Nu mai inzistăm asupra construcţiei iperbolei.

Locul lui Q. Fiind că

$$\sphericalangle x\,O\,\beta=\frac{\pi}{2}-\theta,$$

intersecţia dreptelor $O\beta$, MM' de ecuaţii

$$\begin{cases} y=x\operatorname{cotg}\theta \\ x=\dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}2\theta} \end{cases}$$

se află eliminând θ între aceste ecuaţii. Procedând ca în sistemul (60), obţinem

$$\begin{cases} x=0 \\ y^2+2xy-x^2-2ay=0. \end{cases}$$

Locul lui Q *este astfel format de axa* $y'y$ *şi iperbola* $(x+y)^2-2x^2=2ay$.

Observări. 1°. Ar fi interesantă şi o soluţie geometrică.

2°. Dreapta AB s'ar putea înlocui cu o dreaptă oarecare.

25. **Problemă.** *Se cere configuraţia de ecuaţie rombică*

(61) $$r=a\sin 2\theta,$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi=90^0$.

Prima soluţie. Observăm că r este pozitiv numai pentru $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ şi $\pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$, ceea ce înseamnă că, configuraţia (61) este simetrică în raport cu origina. O vom construi dar numai în primul cadran şi o vom întregi cu simetrica ei faţă de origină.

În acest scop procedăm astfel:

Din origina O *a unui sistem de axe* $x'x$, $y'y$ *ducem în primul cadran semi-dreapta variabilă* $O\alpha$.

Luăm apoi pe Oy *segmentul* $OA=a$ *şi din* A *ducem semi-dreapta* $A\beta$ *astfel ca*

$$\sphericalangle\,OA\beta=2\sphericalangle\,x\,O\,\alpha.$$

Intersecţia P *a semi-dreptelor* $O\alpha$, $A\beta$ *aparţine configuraţiei cerute,* (fig. 17).

Fie întâi P_1, P_2 proecţiile ortogonale ale lui P pe axele $x'x$, $y'y$, fie încă

$$\sphericalangle\,x\,O\,\alpha=\theta,\quad\text{deci}\quad\sphericalangle\,OA\beta=2\theta$$

şi pentru a justifica afirmarea că P aparţine configuraţiei cerute, vom arăta că, *coordonatele rombice* ale lui P, care pe figură sunt

$$r=OP_1,\qquad\theta=\sphericalangle\,x\,OP,\qquad 90^0=\varphi$$

satisfac ecuaţia (61).

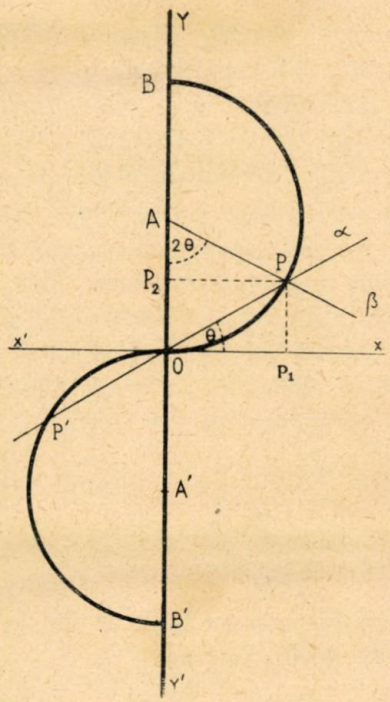


Fig 17.

În adevăr, din triunghiurile dreptunghice AP_2P, OP_2P, deducem observând figura

$$P_2P=AP_2\operatorname{tg}2\theta=(a-OP_2)\operatorname{tg}2\theta=$$
$$(a-P_2P\operatorname{tg}\theta)\operatorname{tg}2\theta.$$

De aci rezultă

$$P_2P=\frac{a\operatorname{tg}2\theta}{1+\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}2\theta}=a\sin 2\theta$$

şi cum $P_2P=OP_1=r$, avem încă

$$r=a\sin 2\theta,$$

tocmai ecuaţia (61). Punctul P a fost astfel bine determinat.

Variind unghiul θ, $(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$ obţinem alte puncte analoage cu P, care unite ne dau arcul OPB. În particular pentru $\theta=\frac{\pi}{2}$, punctul P

coincide cu fiecare punct al semi-axei Oy. Complectând partea aflată cu simetrica sa față de origine, conchidem:

Configurația cerută este formată din arcul O P B, *din arcul* O P′ B′ *și din axa* $y'y$.

Vom numi configurația B P O P′ B′ și axa $y'y$. **curba invers S.**

Observare. Pentru a trasa mai precis configurația (61), putem determina în fiecare punct al ei și tangenta corespunzătoare. Pentru aceasta folosim formula (20) adaptată primului cadran și lui $\varphi = 90^0$, anume

$$\text{(62)} \qquad \operatorname{cotg} V = \frac{r'}{r} + \operatorname{tg}\theta.$$

Cum din (61) deducem $r' = 2a\cos 2\theta$, relația (62) devine

$$\operatorname{cotg} V = 2\operatorname{cotg} 2\theta + \operatorname{tg}\theta = \frac{2(1-\operatorname{tg}^2\theta)}{2\operatorname{tg}\theta} + \operatorname{tg}\theta = \operatorname{cotg}\theta,$$

deci

$$V = \theta.$$

Prin urmare tangenta într'un punct P al arcului O P B face cu raza vectoare O P unghiul θ.

Această propietate, cum se observă pe figură, caracterizează un cerc ce trece prin O *tangent axei polare* Ox.

Prin urmare arcul O P B este un semi-cerc cu centru în A și raza a.

Soluția 2-a. Transpunem *ecuația rombică* (61) în *coordonate rectangulare* scriind-o întâi sub forma

$$\text{(63)} \qquad r = \frac{2a\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}.$$

În baza formulelor (9′) pentru primul cadran, ecuația (63) devine

$$x = \frac{2axy}{x^2+y^2},$$

sau

$$\text{(61′)} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x^2+y^2-2ay = 0. \end{cases}$$

Prima ecuație reprezintă axa $y'y$ din care vom reține semi-axa Oy, iar a 2-a ecuație reprezintă un cerc din care vom reține numai semicercul O P B.

Construind și simetricul părței aflate față de origine, *avem aceiași configurație ca în prima soluție*, **curba invers S.**

Observare importantă. Dacă în construcția din prima soluție îndepărtăm restricția ca $O\alpha$ să varieze în primul cadran, restricție impusă de structura ecuației (61), putem enunța următoarea problemă de *geometrie analitică* sau *geometrie pură*.

Problemă. *Se dau axele rectangulare* $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O.

Pe Oy *se ia un punct fix* A *prin care se duce dreapta variabilă* $A\beta$; *ea întâlnește în* P *dreapta* $O\alpha$ *dusă astfel ca*

$$\sphericalangle xO\alpha = \frac{\sphericalangle OA\beta}{2}.$$

Unghiurile $xO\alpha$, $OA\beta$ *se măsoară în senz pozitiv respectiv de la* Ox *și* AO.

Se cere locul punctului P *când* $A\beta$ *variază.*

Soluție analitică. Notăm, (fig. 16)

$$OA = a, \qquad \sphericalangle OA\beta = 2\theta, \quad \text{deci} \quad \sphericalangle xO\alpha = \theta.$$

Coordonatele (x, y) ale punctului P satisfac simultan ecuațiile dreptelor $O\alpha$, $A\beta$, anume

$$\begin{cases} y = x\operatorname{tg}\theta \\ y - a = -x\operatorname{cotg} 2\theta. \end{cases}$$

Trebuie să eliminăm θ între aceste ecuații. A 2-a ecuația putându-se scri încă

$$y - a = \frac{-x(1-\operatorname{tg}^2\theta)}{2\operatorname{tg}\theta}$$

în virtutea primei ecuații devine

$$y - a = \frac{x(y^2-x^2)}{2xy}.$$

De aci deducem

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2+y^2-2ay = 0. \end{cases}$$

Prin urmare: *Locul lui* P *este format din axa* $y'y$ *și cercul cu raza* a *de centru* A $(0, a)$.

Soluție geometrică. În triunghiul O A P avem

$$\sphericalangle POA = \frac{\pi}{2} - \theta, \qquad \sphericalangle OAP = 2\theta$$

și atunci rezultă

$$\sphericalangle OPA = \pi - (\overset{\frown}{POA} + \overset{\frown}{OAP}) =$$

$$\pi - (\frac{\pi}{2} - \theta + 2\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Triunghiul O A P este astfel isoscel şi avem

$$AP = AO = a.$$

A fiind fix, iar A P constantă ($= a$), rezultă:

Locul lui P *este cercul de centru* A *şi rază* O A, *precum şi axa* $y'y$ *ce se obţine când* $O\beta$ *şi* $O\alpha$ *coïncid cu* $y'y$.

Observare. Dacă am fi considerat *ecuaţia rombică* (61) cu unghiul auxiliar $\varphi = 45^0$, atunci în locul semi-cercului O P B am fi avut arcul din primul cadran al *cubicei*

$$(64) \qquad (x+y)(x^2+y^2) = 2axy,$$

precum şi arcul din al 3-lea cadran al *cubicei*

$$-(x+y)(x^2+y^2) = 2axy,$$

arce obţinute prin transformarea ecuaţiei (61) cu ajutorul formulelor de transformare 9) corespunzătoare cadranelor I şi III.

Grafic, un punct Q al configuraţei (61), *în acest caz* $\varphi = 45^0$, s-ar fi obţinut prin intersecţia semi-dreptei $O\alpha$ cu o semi-dreapta $P_1\gamma$ dusă astfel ca

$$\sphericalangle P_1 O\gamma = 45^0,$$

$O\alpha$ şi P_1 fiind aceiaşi din construcţia dată în prima soluţie.

PROPRIETĂŢI DE GEOMETRIE AVÂND ORIGINA ÎN APLICAŢIILE „COORDONATELOR ROMBICE“

DE

O. N. ŢINO.

(urmare)

4. a. *Fie* C *şi* Δ *focarul şi directoarea unei parabole, iar* M *un punct al ei. Fie* C D *perpendiculara pe* Δ, *iar* O Y *perpendiculara la mijlocul* O *pe segmentul* C D; P *şi* R *proiecţiile lui* M *respectiv pe* O Y *şi* Δ, *iar* N *intersecţia paralelei prin* P *la* C R *cu dreapta* M C.

Cercul descris pe $\overline{OP}$ *ca diametru este tangent dreptei* M C *în punctul* N.

Fie B intersecţia dreptelor C D şi P N. Din paralelogramul C B P R rezultă că

$$\overline{PR} = \overline{CB} = \overline{OC} = \overline{OD},$$

iar în triunghiul isoscel C M R, paralela P N la R C taie pe laturi segmente respectiv egale, deci

$$\overline{CN} = \overline{PR} = \overline{CO} = \overline{CB}.$$

Triunghiul O N B, fiind înscris în semicercul O N B, este dreptunghiu în N, deci *cercul de diametru* $\overline{OP}$, *trece prin* N. Dacă am presupune că cercul O N P taie a doua oară în N′ segmentul M N, am avea după o proprietate cunoscută: $\overline{MN} \cdot \overline{MN'} = \overline{MP}^2$, deci $\overline{MN}^2 = \overline{MN} \cdot \overline{MN'}$, de unde: $\overline{MN'} = \overline{MN}$.

Aşadar cercul O N P, trecând prin N, este tangent dreptei M C în acest punct, adică dreptei care uneşte punctul dat M al parabolei cu focarul ei, C.

b. *Să presupunem acum o parabolă dată prin axa ei* O X, *tangenta la vârful ei* O Y *şi un punct al ei* M.

Fie P *proiecţia punctului* M *pe* O Y *şi fie* (I) *cercul descris pe* $\overline{OP}$ *ca diametru. Ducem din* M *a doua tangentă* $\overline{MN}$ *la cercul* (I), *care prelungită taie axa* O X *în* C. *Prelungim pe* $\overline{CO}$ *cu* $\overline{OD} = \overline{CO}$ *şi fie* Δ *perpendiculara în* D *pe* OX, *iar* R *intersecţia lui* Δ *cu* M P. *Punctul* M *este echidistant de punctul* C *şi dreapta* Δ.

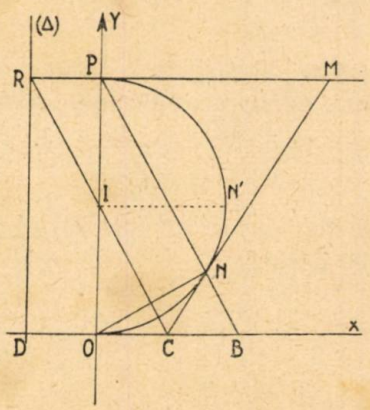


Figura 2.

In adevăr, având $\overline{MP} = \overline{MN}$, tangente duse din acelaşi punct la acelaşi cerc, iar $\overline{CN} = \overline{OC}$, pentru acelaşi motiv, deci $\overline{CN} = \overline{CO} = \overline{OD} = \overline{RP}$ şi ca urmare $\overline{MP} + \overline{PR} = \overline{MN} + \overline{NC}$, sau: $\overline{MR} = \overline{MC}$.

Punctul C *fiind pe axa parabolei*, iar D simetricul lui C față de vârful parabolei, *focarul parabolei* este chiar punctul C iar *directoarea* ei chiar dreapta Δ.

c. Se deduce deci, din cele de mai sus pentru *focarul* și *directoarea* unei parabole dată prin axa ei, tangenta la vârf și un punct al ei, următoarea construcție:

Proiectăm punctul M în P pe tangenta la vârf în P, iar pe $\overline{OP}$ ca diametru construim cercul (I). Din M centru, cu raza $\overline{MP}$ tăiem cercul (I) a doua oară în N. Dreapta $\overline{MN}$ prelungită determină pe axa parabolei *focarul* C.

Construim simetricul D al lui C în raport cu O, apoi perpendiculara în D pe axă, obținând astfel *directoarea* Δ.

d. Pentru a obține alte puncte ale parabolei, facem următoarea construcție: Luăm pe dreapta OP, un segment $\overline{OP_1} \neq \overline{OP}$ și pe $\overline{OP_1}$ ca diametru construim cercul (I_1); din C centru, cu raza cât $\overline{CO}$, tăiem cercul (I_1) a doua oară în N_1; paralela dusă prin P_1 la axa parabolei, intersectează dreapta CN_1 într'un punct M_1, care este un punct al parabolei.

Avem:

$$\overline{M_1P_1} = \overline{M_1N_1};$$

$$\overline{CN_1} = \overline{CO} = \overline{OD} = \overline{P_1R_1} \quad *^*_* \quad \overline{M_1R_1} = \overline{M_1C_1}.$$

Observare. Locul punctului N, de contact al razelor vectoare MC cu cercul de diametru variabil $\overline{OP}$, este un cerc cu centrul în focarul C și raza OC.

5. Generalizând relația în *coordonate rombice*, D-l prof *V. Alaci* găsește proprietatea mai generală următoare:

Pe un segment de dreaptă $\overline{OA}$ *se dau două puncte fixe* F, B, *astfel ca* $\overline{OB} = 2\overline{OF}$, *iar pe perpendicula* OT *la* OA *un punct* T *variabil. Dreptele* TB *și* TA *taie a doua oară respectiv cercurile de diametre* $\overline{OB}$ *și* $\overline{OA}$ *în* N și L

Locul punctului P, *de intersecție al dreptelor* OL, FN *este o conică.*

Vom da o demonstrație prin geometria elementară și acestei proprietăți generale precizând că vârful acestei conice este în O, iar focarul în F, dând în același timp construcția directoarei corespunzătoare focarului F.

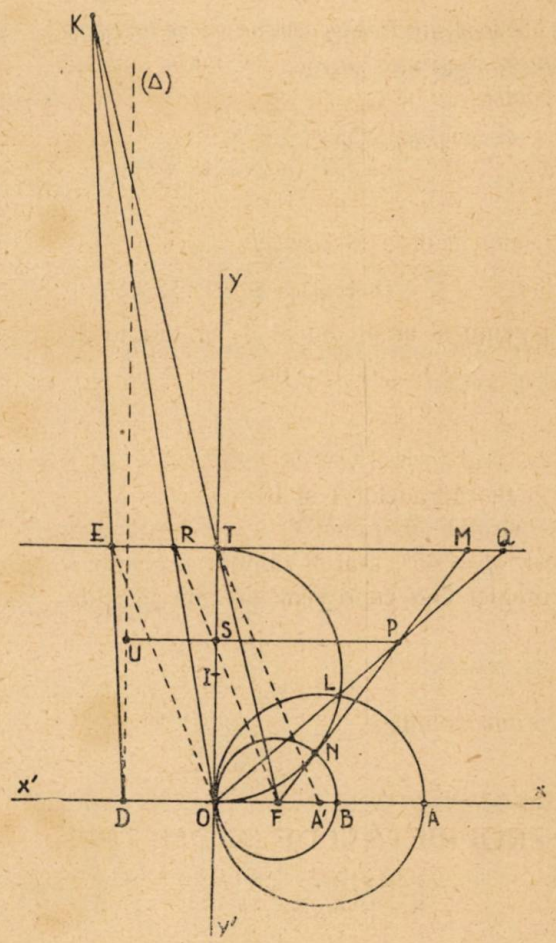


Figura 3.

Observăm de la început, că cercul (I) descris pe diametrul variabil $\overline{OT}$ trece prin punctele L și N, fiind tangent în N dreptei PF, căci $\overline{FN} = \overline{OF}$.

Să însemnăm acum cu M, Q respectiv punctele de intersecție ale dreptelor FP, OP cu tangenta în T la cercul (I), iar cu S proiecția punctului P pe diametrul $\overline{OT}$. Fie A'' mijlocul lui $\overline{OA}$, punctele R și E unde paralelele duse prin F și O la A'T taie pe TM, K intersecția dreptelor (FT, OR D intersecția dreptelor KE, OA, (Δ) perpendiculara în O pe OA, U intersecția dreptelor PS, Δ.

Avem că:

(1) $\overline{SU} = OD$, $\overline{ER} = \overline{OF}$, $\overline{RT} = \overline{FA'}$,

deci

$$(2)\quad \overline{OD} = \frac{\overline{OF}\cdot\overline{RE}}{\overline{RT}} = \frac{\overline{OF}^2}{FA'} = \frac{2\overline{OF}^2}{\overline{OA} - 2\overline{OF}}.$$

Din trapezul dreptunghiu O T M F, în baza asemănării figurilor, avem:

$$(3)\quad \overline{PF} = \frac{\overline{OF}\cdot\overline{MF}}{\overline{OF} + \overline{TQ} - \overline{TM}}$$

şi

$$(4)\quad \overline{PS} = \frac{\overline{OF}\cdot\overline{QT}}{\overline{OF} + \overline{TQ} - \overline{TM}}.$$

Dar din asemănarea triunghiurilor O T Q şi A O T avem:

$$(5)\quad \overline{TQ} = \frac{\overline{OT}^2}{\overline{OA}},$$

iar din triunghiul F I M:

$$(6)\quad \overline{MT} = \overline{MN} = \frac{\overline{IN}^2}{\overline{NF}} = \frac{\overline{OT}^2}{4\overline{OF}}$$

şi ca urmare:

$$(7)\quad \overline{MF} = \frac{\overline{OT}^2 + 4\overline{OF}^2}{4\overline{OF}}.$$

Introducând (5) şi (6) în (3) şi (4) obţinem:

$$(8)\quad \overline{PF} = \frac{\overline{OF}\cdot\overline{OA}(\overline{OT}^2 + 4\overline{OF}^2)}{4\overline{OF}^2\cdot\overline{OA} + 4\overline{OF}(\overline{OF} - \overline{OA})\overline{OT}^2};$$

$$(9)\quad \overline{PS} = \frac{4\overline{OF}^2\cdot\overline{OT}^2}{4\overline{OF}^2\cdot\overline{OA} + (4\overline{OF} - \overline{OA})\overline{OT}^2}$$

şi

$$(10)\quad \overline{PU} = \overline{PS} + \overline{SU} = \overline{PS} + \overline{OD} =$$

$$\frac{4\overline{OF}^2\cdot\overline{OA}(\overline{OT}^2 + 4\overline{OF}^2)}{(\overline{OA} - 2\overline{OF})[4\overline{OF}^2\overline{OA} + (4\overline{OF} - \overline{OA})\overline{OT}^2]}.$$

Impărţind relaţia (8) la (10) găsim:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PU}} = \frac{\overline{OA} - 2\overline{OF}}{2\overline{OF}} = \frac{\overline{OA} - \overline{OB}}{\overline{OB}} = \text{constant.}$$

Deci locul punctului P este o conică cu vârful în O, având focarul în F şi directoarea corespunzătoare dreapta Δ şi anume:

Dacă $\overline{OA} < 2\overline{OB}$ o elipsă

Dacă $\overline{OA} = 2\overline{OB}$ o parabolă

Dacă $\overline{OA} > 2\overline{OB}$ iperbolă (ramura coresp. focarului aşezat în F).

Este evident că focarul uneia din conice oarecare poate fi construit întocmai ca în cazul parabolei, ducând tangenta din P la cercul de diametru $\overline{OT}$.

NOTE MATEMATICE

1. — *Transformarea expresiunei*

$$\sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C}}}.$$

1°. În articolul publicat sub acest titlu la pag. 113, vol XXI, D-l *E. Vişa* stabileşte condiţiile necesare şi suficiente pentru ca expresiunea din titlul prezentei note să se transforme în suma

$$\sqrt{x + \sqrt{z}} + \sqrt{y - \sqrt{z}}$$

şi deduce apoi transformări analoage pentru fiecare din expresiunile

$$E = \sqrt{A \pm \sqrt{B \pm \sqrt{C}}}.$$

Vreau să informez pe cititorii acestei reviste că, regretatul profesor *G. Ţiţeica* s'a ocupat şi el cu una din aceaste expresiuni propunând în problema 947 din *„Gazeta Matematică“* să se găsească condiţiunile pe care trebuie să le îndeplinească A, B, C pentru a avea

$$(1)\quad \sqrt{A + \sqrt{B + \sqrt{C}}} = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

x şi y fiind raţionali.

În soluţia dată la pag. 213, Vol. XI, *„Gazeta Matematică“*, problemei sale, *G. Ţiţeica* găseşte că pentru a avea relaţia (1) trebuiesc îndeplinite condiţiile:

$$(2)\quad B^2 - C = m^2,$$

$$(3)\quad B + m = 2n^2,$$

$$(4)\quad A^2 + 2An + m = p^2,$$

unde m, n, p sunt numere raţionale.

La finele soluției problemei 947, *G. Țițeica* rezolvă și interesanta problemă inversă, adică aceia de *a găsi o expresie cu trei radicale suprapuse care să fie egală cu o sumă de două radicale date.* Găsește că (4) trebuie să aibă rădăcini raționale în raport cu A, deci

(5) $$n^2 - m + p^2 = q^2$$

și atunci

$$A = -n + q$$

unde q este un număr rațional. Rezultă că

$$x = \frac{p+q}{2}, \qquad y = \frac{p-q}{2},$$

ceiace determină pe p și q în funcție de numerele date x, y, rămânând n arbitrar Ecuația (5) ne dă atunci pe m, (3) ne dă pe B și (2) pe C.

Procedând ca în soluția dată problemei 947 sau ca în articolul d-lui *E. Vișa* se pot transforma în sume sau diferenți de radicali ori care din expresiunile E.

2°. Revenind acum la articolul d-lui *E. Vișa* și urmând lui *G. Țițeica*, ne punem problema inversă a d-lui *E. Vișa* și adică: *fiind date cantitățile raționale și pozitive* x, y, z *să se găsească trei numere raționale și pozitive* A, B, C *așa în cât să avem una din egalitățile*

$$\sqrt{x+\sqrt{z}} \pm \sqrt{y-\sqrt{z}} = \sqrt{A \pm \sqrt{B \pm \sqrt{C}}}.$$

Numărul B este dat de

$$B = 4xy - 4z$$

cu condiția ca $xy - z > 0$, iar A și λ sunt dați de

$$x = \frac{A-\lambda}{2}, \qquad y = \frac{A+\lambda}{2}$$

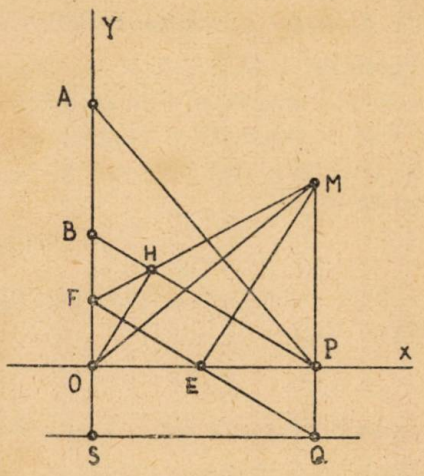
cu condiția $x < y$, în fine C este dat de ecuația în λ stabilită de d-l *E. Vișa* la pagina 115 din anul XXI al revistei.

G-L GH. BUICLIU

---

2. — *Asupra unei proprietăți geometrice obținută ca aplicație a coordonatelor rombice ale d-lui V. Alaci.*

Ca aplicație ale coordonatelor rombice, d-l *V. Alaci* a găsit următoarea proprietate: *Se dau două drepte perpenaiculare* Ox *și* Oy, *și pe* Oy *punctele* A, B *mijlocul lui* OA, *și* F *mijlocul lui* OB. P *fiind variabil pe* Ox, *perpendiculara din* O *pe* AP *taie în* M *paralela din* P *la* Oy. *Locul lui* M *este o parabolă cu tangenta la vârf* Ox *și focarul* F. *Intersecția* H *a dreptelor* FM *și* BP *este cercul de diametru* OB.



1. În cele ce urmează voi da o soluție geometrică simplă, și voi expune și alte proprietăți ale figurii. Triunghiurile OAP și OPM sunt asemenea ca având laturile perpendiculare. Deci și dreptele corespunzătoare din aceste triunghiuri vor fi perpendiculare. E fiind mijlocul lui OP, urmează că medianele lor PB și ME sunt perpendiculare.

FE unind mijloacele dreptelor OB și OP, este paralelă cu BP; și cum BP este perpendiculară pe ME, rezultă că FE este perpendiculară pe ME. Prelungim pe FE până taie pe MP în Q și fie S intersecția lui Oy cu paralela din Q la Ox. Figura FBPQ fiind un paralelogram, urmează că BF=PQ, și cum OF=FB, rezultă că OF=PQ. Din triunghiurile egale FEO și QEP urmează că FE = EQ și cum EM este perpendiculară pe FE, rezultă că FM = MQ.

Deci M este depărtat egal de punctul F și dreapta SQ, de unde urmează că locul lui M este parabola cu focarul F și directoarea SQ

2. Fie H intersecția lui FM cu BP. HP fiind paralelă cu FQ, rezultă FH = PQ, și cum PQ = FB = OF, urmează că FH = OF = FB. Deci triunghiul OHB este dreptunghic în H, și locul lui H este cercul de diametru OB.

3. În triunghiul isoscel F M Q, dreapta H P este paralelă cu F Q, mijlocul E al lui F Q este egal depărtat de P şi H. Deci E P = E H, triunghiurile E F H şi E Q P sunt egale şi cum E P este perpendiculară pe M Q, urmează că E H este perpendiculară pe F M. Deci M H *şi* M P *sunt tangente în* H *şi* P *la cercul de diametru* O P.

4. Unghiurile F M E = E M Q, dreapta M E este bisectoarea unghiului F M Q format de raza vectoare F M a parabolei şi paralela M Q la axa parabolei. Deci M E *este tangenta în* M *la parabola descrisă de* M.

N. ABRAMESCU

---

3. — *Notă asupra transformărilor rombice şi antirombice.*

Dacă

$$R = R(\theta), \quad r = r(\theta), \quad \bar{r} = \bar{r}(\theta) \tag{1}$$

sunt ecuaţiile în coordonate polare ale unei curbe Γ şi respectiv *ale transformatelor sale rombice şi antirombice* γ şi $\bar{\gamma}$ de ordinul n şi M, m, $\bar{m}$, punctele în care o rază vectoare intersectează aceste curbe, d-l profesor *V. Alaci* a arătat [1] că, între razele vectoare ale acestor puncte există relaţia fundamentală

$$R^2 = r \cdot \bar{r}. \tag{2}$$

În cele de mai jos servindu-mă de această relaţie voi deduce o propietate caracteristică pentru *transformările rombice şi antirombice de ordinul n.*

Unghiurile V, v, $\bar{v}$, făcute de tangentele la curbele Γ, γ şi $\bar{\gamma}$ cu raza vectoare în punctele M, m, $\bar{m}$, sunt date de relaţiile

$$\begin{aligned} R &= R' \operatorname{tg} V \\ r &= r' \operatorname{tg} v \\ \bar{r} &= \bar{r}' \operatorname{tg} \bar{v}, \end{aligned} \tag{3}$$

unde R', r', $\bar{r}'$ sunt derivatele în raport cu argumentul θ ale funcţiunilor (1). Inlocuind în (2) pe R, r, $\bar{r}$, cu valorile (3), avem:

$$R'^2 = r' \bar{r}' \frac{\operatorname{tg} v \cdot \operatorname{tg} \bar{v}}{\operatorname{tg}^2 V}. \tag{4}$$

V. Alaci: „Transformarea rombică şi antirombică", R. M. T., Nr. 11, 1941.

Derivând (2) în raport cu θ şi înlocuind R, r, $\bar{r}$, cu valorile (3) rezultă

$$R'^2 = r' \bar{r}' \frac{\operatorname{tg} v + \operatorname{tg} \bar{v}}{2 \operatorname{tg} V}. \tag{5}$$

Din comparaţia relaţiilor (4) şi (5) se deduce

$$\frac{2}{\operatorname{tg} V} = \frac{1}{\operatorname{tg} v} + \frac{1}{\operatorname{tg} \bar{v}}. \tag{6}$$

Tangenta trigonometrică a unghiului V *este media armonică între tangentele trigonometrice ale unghiurilor* v *şi* $\bar{v}$.

O consecinţă imediată a relaţiei (5) este propietatea cunoscută a transformării prin inversiune: tangentele în două puncte omoloage m şi $\bar{m}$ la două curbe inverse sunt simetrice faţă de mediatricea segmentului $m\bar{m}$.

În adevăr, d-l prof. *V. Alaci* a arătat [1] că curbele γ şi $\bar{\gamma}$, *transformatele rombice şi antirombice de ordinul n* ale cercului $R = a$, sunt inverse faţă de origină. În acest caz $V = \frac{\pi}{2}$ şi relaţia (6) dă

$$v + \bar{v} = \pi.$$

C. BORS

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLVII, No. 6, Februarie 1942. Matematica românească în Transnistria, de *I. Ionescu*. Curba, care încovoiată, nu se schimbă, de *A. Myller*. Generalizarea unei teoreme a lui *Pappus* (urmare şi sfârşit), de *D V. Ionescu*. Corespondenţa prin tangente isocline (urmare şi sfârşit), de *D-tru Ion Mangeron*. Concursul *„Gazetei Matematice"*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Gazeta Matematică*, Supliment cu exerciţii, anul VIII. N-rile 5—6. Februarie. Martie 1942.

3. *Pozitiva*, Revistă de matematici, Anul II, Nrile 5—6, Ianuarie—Februarie 1942. Mişcarea punctului material, de *M. Ghermănescu*. Asupra construcţiei centrelor de curbură la curbele plane, de *Adrian Gheorghiu*. O nouă generalizare a formulei lui *Pascal*, de *Eugen Vişa*. Asupra determinatului *Vandermond*, de *N. N. Mihăileanu*. O proprietate a polinoamelor antisimetrice, de *Mircea Mănescu*. Asupra unor serii, de *Marcel N. Roşculeţ*. Urmare la articolul „Studiu asupra unei conice", de *G. D. Simionescu*. Note matematice, de *G. G. Constantinescu* şi *N. N. Mihăileanu*. Probleme propuse.

4. *Vicenzo. G. Cavallaro*. Sulla formula che esprime una distanza variabile în funzione di tre distanze assegnate. (Estratto del Bolletino dell'Unione Matematica Italliana, 1940).

5. *Vicenzo G. Cavallaro.* Su la generalizzazione del triangolo delle mediane. (Estrato del Periodico di Matematiche, 1941).

6. *Letterio Toscano.* Transformata di *Laplace* di prodotti di fonzioni di *Bessel* e polinomi di *Laguerre.*

7. *Th. Angheluță* și *P. Sergescu:* Comemorarea ilustrilor matematicieni *Emil Picard* și *Henri Lebesque.* (Monografii matematice, fascicula VII, Seminarul de matematici al Universității din Cluj.)

8. *P. Sergescu.* † Profesorul *Gh. Bratu.* (Extras din Gazeta Matematică, N-rile 3—4, 1941).

9. *P. Sergescu.* Le professeur *G. Bratu.* (Mathematica, Vol. XVII, 1941).

10. *P. Sergescu.* Le professeur *D. Emmanuel* (Mathematica, Vol. XVII, 1941.

11. *M. Ghermănescu.* Memoriu de titluri și lucrări. (1942).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1647. — *Într'un triunghiu dreptunghiu avem relațiile*

$$a^3 = -b^3 \sin 3B + c^3 \cos 3B + 3abc \sin 2B$$

$$0 = b^3 \cos 3B + c^3 \sin 3B - 3abc \cos 2B.$$

N N. MIHAILEANU

Soluția. Ținând seamă că într'un triunghiu dreptunghiu

$$\sin B = \frac{b}{a} \quad \text{și} \quad \cos B = \frac{c}{a},$$

putem scrie

$$\sin 3B = 3 \sin B - 4 \sin^3 B = \frac{b}{a^3}(3a^2 - 4b^2),$$

$$\sin 2B = 2\frac{bc}{a^2},$$

$$\cos 3B = 4 \cos^3 B - 3 \cos B = \frac{c}{a^3}(4c^2 - 3a^2),$$

$$\cos 2B = \frac{c^2 - b^2}{a^2}.$$

Folosind aceste formule și teorema lui *Pitagora,* partea a doua a primei relații se scrie succesiv

$$-\frac{b^4}{a^3}(3a^2 - 4b^2) + \frac{c^4}{a^3}(4c^2 - 3a^2) + 6\frac{b^2c^2}{a}$$

$$= -\frac{3}{a}(b^4 + c^4) + \frac{4}{a^3}(b^6 + c^6) + 6\frac{b^2c^2}{a}$$

$$= -\frac{3}{a}[(b^2 + c^2)^2) - 2b^2c^2] +$$

$$\frac{4}{a^3}[(b^2 + c^2)^3 - 3b^2c^2(b^2 + c^2)] + 6\frac{b^2c^2}{a}$$

$$= -\frac{3}{a}(a^4 - 2b^2c^2) + \frac{4}{a^3}(a^6 - 3a^2b^2c^2) = a^3,$$

iar cea a celei de-a doua relații

$$\frac{b^3c}{a^3}(4c^2 - 3a^2) + \frac{bc^3}{a^3}(3a^2 - 4b^2) - 3abc\frac{c^2 - b^2}{a^2}$$

$$= -3\frac{bc}{a}(b^2 - c^2) - 3bc\frac{c^2 - b^2}{a} = 0,$$

Soluție dată de Drele: *Papadopol E.* (Bacău), *Checian N Ana* (Timișoara) și D-nii: *Andrievici N.* (L. M N. F), *Anițescu N. N., Bakonyi C.* (Timișoara), *Buznea D. D.* (L. M. N. F), *Cetățeanu Șt.* (București), *Cristea I. N.* (Blaj), *Diaconescu D. I.* (T. Severin), *Diaconescu M* (L. M. N. F), *Gligor N. I.* (Arad), *Jidanu I. C.* (Beiuș), *Slt. Lupescu C.* (Roman), *Modâlcă G. D.* (T.-Severin), *Slt. Popescu Adr, Popescu-Zorica N. A.* (București), *Stamate I. I.* (Lugoj), *Slt. Ștefănescu F. M.* (Alba-Iulia). *Stoenescu D. M.* (L. M. N. F și *Staicu I. N* (L. M. N. F).

Gh. Th. Gh.

Problema 1688. — *Într'un triunghiu există relația*

$$\frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \frac{\sin C - \sin B}{\cos B - \cos C} = \frac{r_a}{p}$$

notațiile fiind cele obișnuite.

SUB-LT MARIN F STEFANESCU

Soluția. Cum suma unghiurilor unui triunghiu este 180^0, avem succesiv

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2},$$

$$\cos B + \cos C = 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2},$$

$$\sin C - \sin B = 2 \sin \frac{C-B}{2} \cos \frac{C-B}{2} = 2 \sin \frac{C-B}{2} \sin \frac{A}{2},$$

$$\cos B - \cos C = 2 \sin \frac{C+B}{2} \sin \frac{C-B}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{C-B}{2}$$

valori cari introduse în relația din enunț ne spun că primele două fracții au ambele aceiași valoare: $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$. Relațiile din enunț se reduc deci la formula cunoscută:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Prima egalitate din enunț se mai poate scrie

$$\cos^2 B - \cos^2 C = \sin^2 C - \sin^2 B$$

$$\cos^2 B + \sin^2 C = \sin^2 C + \cos^2 B,$$

egalitate valabilă oricare ar fi unghiurile B şi C.

Au rezolvat problema D-rele *Checian N Ana* (Timişoara), *Papadopol D. Elena* (Bacău) şi Dnii: *Aldea V. M.* (Buzău), *Andrievici N.* (L. M. N. F.), *Aniţescu N. N.*, *Bakonyi C.* (Timişoara), *Buznea D. D.* (L. M. N. F), *Cetăţeanu Şt.* (Bucureşti), *Cristea I. N.* (Blaj), *Dăscălescu H* (Focşani), *Diaconescu D. I.* (T.-Severin), *Dragomir A* (L. M. N. F.), *Dragon I. Gh.* (Bucureşti), *Georgescu B.* (Craiova), *Gligor N. I.* (Arad), *Hermann I. C.* (Blaj) *Ionescu F. P.* (Craiova), *Jidanu I. C.* (Beiuş), *Luca I. I* (Arad), *Matei I Aug.* (Cluj), *Mihăileanu C. A.* (Arad), *Mironescu I. D.* (Tg. Mureş), *Modâlcă S. Em.* (T.-Severin), *Mureşan I. Oci.* (Arad), *Negrea M* (Brăila) *Pepolozky C.* (Cluj), *Saegiu V. C.* (Cluj), *Şandor V.*, *Staicu I. N* (L. M. N. F), *Stamate I. I.* (Lugoj), *Stoenescu D. M.* (L. M. N. F), *Suhăţeanu V. B.* (L. M. N. F.), *Tătaru Alexandru*, (Orăştie), *Tilică C. Şt.* (Tâmna, Mehedinii) *Topalescu Gh.* (Tg. Mureş), *Văduva Fl. M.* (Giurgiu), *Vasiliu D* (Timişoara), *Venteş D* (Beiuş) şi *Vijelie Gh. Eug.* (L. M. N. F).

Gh. Th. Gh.

Problema 1689. — *Să se găsească un patrat de cinci cifre, astfel că micşorându-i cifra miilor cu o unitate el devine de forma a b c b a.*

A. GLODEN

Ultima cifră poate fi $a = 1, 4, 5, 6, 9$.

$a = 1$. Patratele care încep cu 1 au rădăcina cuprinsă între 100 şi 141, adică $100 < N \leq 141$. Dacă N^2 se termină cu 1, N se determină cu 1 sau cu 9, deci poate fi

101, 109, 111, 119, 121, 129, **131**, 139, **141**.

Dintre acestea, 131 şi 141 dau soluţiile

$$131^2 = 17161, \qquad 141^2 = 19881.$$

$a = 4$. Avem $200 < N \leq 223$. N se termină cu 2 sau cu 8, deci pote fi

202, 208, 212, 218, **222**,

dintre care, numai 222 dă soluţia

$$222^2 = 49284.$$

$a = 5$. Avem $245 < N < 264$. N se termină cu 5, deci poate fi 225 sau 235, care nu dau soluţie.

$a = 6$. Avem $245 < N \leq 264$. N se termină cu 4 sau cu 6, deci poate fi

246, 254, 256, 264,

care nu dau soluţie.

$a = 9$. Avem $300 \leq N \leq 316$. N se termină cu 3 sau cu 7, deci poate fi

303, 307, **313**,

care dau soluţiile

$$303^2 = 91809. \qquad 313^2 = 97969.$$

Problema admite astfel cele *cinci* soluţii de mai sus

Notă. Au găsit toate soluţiile de mai sus D-nii *Moldoveanu C.* şi *Tilică Şt.* Au mai dat: D-l *Ionescu Petre* 4 soluţii, D-l *Jidanu C.* 3 soluţii, iar D-ra *Papadopol E.*, şi D-nii *Augustin M.*, *Aniţescu N.*, *Cristescu D.*, *Selmereanu H.*, şi *Tătaru A.*, câte o soluţie.

M. G.

Problema 1691. — *Ştiind că*

$$a(bc - a^2) + b(ac - b^2) + c(ba - c^2) = 0,$$

să se stabilească relaţia

$$\frac{a(a - bc)^2 + b(b - ca)^2 + c(c - ab)^2}{a^2(a - bc) + b^2(b - ca) + c^2(c - ab)} = 1 + \frac{ab + bc + ca}{3}.$$

SUB-LT MIRCEA GRUMAZESCU

Soluţia. Relaţia de condiţie se mai poate scrie

$$3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

$$= (a + b + c)(ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0;$$

această egalitate nu poate avea loc decât dacă

(1) $a + b + c = 0$, sau $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$.

A doua cere ca

(2) $$a = b = c.$$

Va trebui deci să arătăm că relaţia a doua din enunţ este valabilă în ipoteza (1) sau (2).

1°. $a + b + c = 0$. Numărătorul şi numitorul se scriu succesiv

$$a(a - bc)^2 + b(b - ca)^2 + c(c - ab)^2 =$$

$$(a^3 + b^3 + c^3) - 2abc(a + b + c) +$$

$$abc(ab + bc + ca) =$$

$$3abc + abc(ab + bc + ca),$$

$$a^2(a - bc) + b^2(b - ca) + c^2(c - ab) =$$

$$(a^3 + b^3 + c^3) - abc(a + b + c) = 3abc$$

şi deci prima parte este egală cu

$$\frac{3abc+abc(ab+bc+ca)}{3abc}=1+\frac{ab+bc+ca}{3}$$

în ipoteza că $abc\neq 0$. Dacă, de exemplu $a=0$, atunci relaţia de demonstrat se reduce la

$$\frac{b^3+c^3}{b^3+c^3}=1+\frac{bc}{3},$$

relaţie ce nu este adevărată decât dacă b sau $c=0$. Ori în acest caz, conform condiţiei trebue ca $a=b=c=0$ şi relaţiile din enunţ nu mai au sens.

2°. $a=b=c$. Relaţia de demonstrat se reduce la: $1-a=1+a^2$ care nu este valabilă decât dacă $a=0$ şi $a=-1$, deci $b=c=0$, sau $b=c=-1$ ceiace am spus că nu are sens.

În rezumat, relaţia de demonstrat nu are loc pentru toate valorile ce satisfac condiţiei puse decât atunci când $a+b+c=0$. Ea trebue deci înlocuită prin această din urmă.

A rezolvat problema în ipoteza (1), fără a observa că (2) nu este posibilă, D-nii *Aldea V. Minea* (Buzău), *Anton G. Gr.* (Bistriţa), *Buznea D. D.* (Târgoviste), *Cetăţeanu Şt.* (Bucureşti), *Chintescu M. M.* (Târgovişte), *Cristea I. N.* (Blaj), *Dăscălescu Şt H.* (Focşani), *Georgescu B.* (Craiova), *Gligor N. I.* (Arad), *Ionescu F. P.* (Craiova), *Jidanu I. C* (Beiuş), *Luca I. I* (Arad), *Simon P.* (Arad) *Slavov I.* (Bolgrad), *Staicu I N.* (Târgovişte), *Stamate I. I.* (Cluj), *Stoenescu D. M.* (Târgovişte), *Suhăţeanu V. B.* (Târgovişte), *Theodor N. D.* (Şc. Navală), *Tilică C. Şt.* (Tâmna, Mehedinţi) şi *Vijelie Gh. E.* (Târgovişte)

Gh. Th. Gh.

Problema 1855. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} a^2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-b^2\frac{\sin y}{1+\cos y}=c^2 \\ a\sqrt[4]{\frac{1-\sin x}{1-\sin x}}-b\sqrt[4]{\frac{1\cos y}{1+\cos y}}=d \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

Soluţie. Observând că,

$$(1)\qquad \frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right),$$

$$(2)\qquad \frac{1-\cos y}{1+\cos y}=\operatorname{tg}^2\frac{y}{2},$$ căci se obţine din (1) pentru $x=\frac{\pi}{2}-y$,

iar

$$\frac{\sin y}{1+\cos y}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 y}{(1+\cos y)^2}}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=\operatorname{tg}\frac{y}{2},$$

sistemul dat devine:

$$(3)\qquad \begin{cases} a^2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-b^2\operatorname{tg}\frac{y}{2}=c^2 \\ a\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}-b\sqrt{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}=d \end{cases}.$$

Împărţind aceste ecuaţii, sistemul (3) devine

$$\begin{cases} a\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}+b\sqrt{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}=\frac{c^2}{d} \\ a\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}-b\sqrt{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}=d \end{cases}.$$

Prin adunare, scădere şi în urmă prin ridicarea la patrat obţinem

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{c^2+d^2}{2ad}\right)^2 \\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=\left(\frac{c^2-d^2}{2ad}\right)^2 \end{cases}$$

deci:

$$\begin{cases} x=(4k+1)\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{c^2+d^2}{2cd}\right)^2 \\ y=2k\pi+2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{c^2-d^2}{2ad}\right)^2 \end{cases}$$

Observare. Când am extras rădăcinele patrate în relaţiile (1) şi (2) am luat în membru al 2-lea numai semnul +, pentru a nu avea expresiuni imaginare.

Au dat soluţii bune, D-ra *Checian Ana* (studentă, Timişoara) şi Dnii: *Aldea V. Minea* (Buzău), *Bakonyi C.* (Politechnica, Timişoara), *Cristea I. Nicolae*, *Gligor N.* (Arad), *Negrea A. Mircea*, *Popescu Adrian* (stud. Polit. Timişoara), *Radoslav Gh. Ioan* şi *Şimon S Petru* (Arad).

Problema 1856. — *Să se stabilească relaţia*

$$(2\cos^2 B+\cos 2B)^2\sin^2 B+$$
$$(2\cos^2 B-3\cos 2B)^2\sin^2 C=1$$

ştiind că unghiurile B *şi* C *sunt complimentare.*

CORNELIU N POPESCU

Ţinând seamă că,

$$2\cos^2 B = 1 + \cos 2B, \quad \sin C = \cos B,$$

primul membru al relaţiei date notat cu E, devine succesiv

$$E = (1 + 2\cos 2B)^2 \sin^2 B + (1 - 2\cos^2 2B)^2 \cos^2 B$$
$$= (\sin^2 B + \cos^2 B) + 4\cos 2B(\sin^2 B - \cos^2 B) +$$
$$4\cos^2 2B(\sin^2 B + \cos^2 B) =$$
$$1 - 4\cos^2 2B + 4\cos^2 2B = 1.$$

Relaţia dată este astfel stabilită.

Soluţii bune dată de d-rele *Checian Ana* (studentă, Timişoara), *Papadopol-Demetra Elena* (Bacău) şi de Dnii: *Aldea V. Minea* (Buzău), *Bakonyi C.* (student Polit., Timişoara), *Boleanţu Lazăr*, (student Polit., Timişoara); *Cristea I. Nicolae*, *Deheleanu Gheorghe*, *Dobrescu V. Eugen*, *Gligor N. Ioan* (lic Arad), *Gloden A.* (Luxemburg), *Goga Fl.* (student, Timişoara), *Ionescu F. Petre* (Craiova), *Iosifescu Cicerone*, *Luca I. Ioan* (stud. Polit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sub-Lt., Roman), *Moldovan Teodor* (lic Loga, Timişoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Petrescu R. Gheorghe* (lic. Giurgiu), *Radoslav Gh. Ion* (Şc. Polit, Bucureşti), *Săruleşteanu I. Emanoii* (Bucureşti), *Schapira Solo* (Piatra-Neamţ), *Şimon S. Petru* (lic. Arad), *Vasiliu Gh. D-tru* (liceul Militar Timişoara), *Văduva F. Marin* (Giurgiu) şi *Voştinariu Gheorghe*.

PROBLEME PROPUSE

2018. — Să se găsească numărul de patru cifre $abcd$ ştiind că suma cifrelor sale este egală în acelaş timp cu unul din numerile ab, cd şi cu jumătatea celuilalt.

G-L G BUICLIU

2019. — Pentru supravegherea continuă a unei zone A, comandantul unei flotile de submarine are disponibile N unităţi. Ştiind că un submarin face n zile din bază până în A, stă în A m zile, iar plecarea pe front se face prin rotaţie, se cere:

1. Câte zile va sta în bază fiecare submarin.

2. Câte submarine se vor întrebuinţa, ca un submarin să stea în bază z zile.

Aplicaţie: $z = 15$ zile; durata unei misiuni 13 zile.

CPT. C V COSTACHESCU

2020. — Se cer polinoamele $P(x)$ de gradul al 3-lea care să satisfacă

$$P'(x) \cdot \frac{P''(x)}{2!} \cdot \frac{P'''(x)}{3!} = (x),$$

$P'(x)$, $P''(x)$, $P'''(x)$ fiind derivate succesive ale lui $P(x)$.

EUGEN WEGENER

2021. — Să se arate că expresia

$$(x-1)\,[(x-1)^{2(2n+1)} + 3] - x^2$$

este divizibilă prin

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4.$$

ION I. LUCA

2022. — Să se rezolve, în întregi, sistemul cu şase necunoscute

$$\begin{cases} x^2 yz = u\,y + z^2 \\ xy^2 z = v\,(x+x)^2 \\ xyz^2 = w\,(x+y)^2 \end{cases}.$$

M. GHERMANESCU

2023. — Se dă un triunghiu dreptunghic isoscel a cărui ipotenuză este a. Să se calculeze în funcţie de a, elementele patrulaterului (unghiuri, laturi şi suprafaţa) format de bisectoarele interioare ale unghiurilor ascuţite B şi C.

MIHAIL BOTEZ

2024. — Pe diametru AB a unui semi-cerc (O) se ia un punct variabil, apoi se descriu semi-cercurile (O_1), (O_2) pe AC şi CB ca diametri, precum şi cercul (ω) tangent semi-cercurilor (O), (O_1), (O_2). Se cere locul centrului de similitudine intern a cercurilor (O) şi (ω).

V. THÉBAULT

2025. — Se dă un cerc O şi o rază fixă OA. Se duce o secantă variabilă OM şi bisectoarea ON (N pe cerc) a unghiului AOM.

Se cere locul geometric al punctului P intersecţia lui OM cu perpendiculara NN_1 pe OA şi să se construiască acest loc.

V. ALACI

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unei comitet compus din:

1. **Abramescu N.,** Doctor în matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.
2. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, Strada M. Cogălniceanu 31, Bucureşti.
3. **Adamescu M.,** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, Bucureşti.
4. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
5. **Almăjan P.** Locot., Licenţiat în matematici, str. Zaharia 23, Bucureşti.
6. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, înzestrarea căilor ferate, întinderea exploatării, la Şc. Polit., Timişoara.
7. **Andronescu P.** Doctor-Inginer, Profesor de Electrotechnică la Şc. Polit., Rectorul Şc. Politechnice din Timişoara.
8. **Angheluţă Th.,** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj, provizor la Timişoara.
9. **Ardeleanu Şt.,** Inginer, Director, Decan şi Profesor liceul industrial, Timişoara .
10. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
11. **Baidaff B. I.** Doctor în Matematici, Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560).
12. **Bădescu Radu,** Doctor în Matematici, Profesor la Facultatea de Agronomie, Bucureşti.
13. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie la Şc. Polit., Timişoara.
14. **Bănărescu M.,** Inginer, Inspector de Control C. F. R., Decan şi Profesor la Şc. Polit. Timişoara, str. Doja 51.
15. **Bărglăzan A.,** Doctor Inginer, Profesor la Maşini Hidraulice, dela Şc. Polit., Timişoara.
16. **Baron C.** Şef de lucrări la catedra de Fizică dela Şc. Politechnică, Timişoara.
17. **Beneş Paul.** Prof. la lic. Schwitz-Thierrin, Bucureşti.
18. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Profesor onorar la Şc. Polit., Timişoara.
19. **Bobârnac M.** Inginer, Soc. Astra, Braşov.
20. **Bonea I.,** Subdirector şi Profesor la Topografie şi Geodezie, Şcoala Politechnică, Timişoara.
21. **Botez M.** Doctor în Matematici, Directorul Şcoalei Superioare de Comerţ din Piatra-Neamţ.
22. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi Liceul Militar, str. Speranţei 12, Iaşi.
23. **Buicliu Gh.** General de Artilerie, Fost 10 ani profesor de Geometrie Analitică la Şcoala Politechnică din Timişoara. Însărcinat cu conferinţa de Balistică Exterioară la Şcoala Politechnică din Bucureşti, str M. Cogălniceanu 10, Bucureşti II.
24. **Călniceanu C.** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe pe lângă catedra de Organe de Maşini la Şcoala Polit., Timişoara.
25. **Călugăreanu George,** Doctor n Matematici, Conferenţiar de Matematici Generale la Universitatea din Cluj (Timişoara).
26. **Cândea C.** Doctor-Inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie la Şc. Polit., din Timişoara.
27. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice la Şc. Polit. din Timişoara.
28. **Claudian Virgil,** Profesor la liceul Mihai Viteazul din Bucureşti.
29. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de Limba engleză la Şc. Polit. din Timişoara.
30. **Coman A.** Profesor liceul „C. Diaconovici-Loga", Profesor onorific la Şc. Polit. din Timişoara.
31. **Comănescu A.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din T.-Măgurele.
32. **Constantinescu G. G.** Licenţiat în Matematici, Bucureşti.
33. **Contantinescu Gh.** Profesor la lic. Lazăr, Bucureşti.
34. **Contrea A.** Doctor în Ştinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şc. Polit., Timişoara.
35. **Costăchescu V. C.** Căpt. de Marină, Constanţa.
36. **Cristescu I.** Inginer, Profesor onorar la Şc. Polit., Timişoara.
37. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie dela Şc. Polit., Timişoara.
38. **Cserveny I.** Inginer U. D. R., Reşiţa.
39. **Curea I.** Doctor în Matematici, Astronom la Observatorul Astronomic din Cluj, provizor la T-şoara.
40. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Subdirector la Observatorul Astronomic din Bucureşti.
41. **Diaconescu N.** Profesor la liceul din Slatina.
42. **Dobrozemsky M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere dela Şc. Polit., Timişoara.
43. **Dumitriu-Dada,** Prof. la Colegiul Carol I, Craiova.
44. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
45. **Frătici I.** Inginer Asistent la Şc. Polit., Timişoara.
46. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti.
47. **Gheorghiu V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Hidraulică dela Şc. Polit., Timişoara.
48. **Gheorghiu Th. Gh.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică, Timişoara.
49. **Ghermănescu M.** Doctor n Matematici, Profesor la catedra de Mecanică, dela Şc. Polit., Timişoara.
50. **Ghiţescu Spiridon,** Profesor secundar, Bucureşti.
51. **Hermann V.,** lic. în Matematici, comuna Baia, Jud. Arad.
52. **Hristea H.** Inginer-Inspector General la C. F. R.
53. **Gloden A.** Doctor în Matematici, Profesor à l'Athénée, Rue Jean Jaurés 11, Luxemburg.
54. **Ionescu-Biss P. H.** Licenţiat în Matematici, Bucureşti.
55. **Ionescu Bujor C-tin,** Licenţiat în Matematici, Profesor, str. Precupeţii Vechi 40, Bucureşti. 3.
56. **Ionescu D. V.** Doctor în Matematici, Profesor şi Decan la Universitatea din Cluj, provizor în Timişoara.
57. **Ionescu-Ţiu D. C.** Locot., Licenţiat în Matematici, Calea Griviţei 158, Bucureşti.
58. **Ivănescu Cezar,** Profesor loceul militar, Târgovişte.
59. **Kielburger M.** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Electrotechnică dela Şc. Polit., Timişoara.
60. **Kühn I.** Doctor în Chimie, Asistent pe lângă Catedra de Chimie Generală dela Şc. Polit., Timişoara.
61. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică, Profesor de Economie Politică şi Legislaţie Industrială la Şc. Polit., Timişoara.
62. **Lascu Bal,** lic. în Matematici, preparator la Facultatea de Ştiinţe din Cluj (Timişoara).
63. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor la Catedra de Mineralogie şi Petrografie dela Şcoala Polit., Timişoara.
64. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Polit., din Bucureşti.

65. **Linteş I.,** Comandor Doctor Inginer, Conferenţiar, Şcoala Politechnică Bucureşti.
66. **Liteanu Gh.,** General de Artilerie, Bucureşti.
67. **Lupan A.** Inginer, Profesor onorar, Timişoara.
68. **Macovschi Eug.,** Doctor în Chimie, Profesor la Facultatea de Ştiinţe, Bucureşti.
69. **Manughevici C.,** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şcoala Politechnică, Timişoara.
70. **Mardan D.,** Inspector general, Prof. la Şc. Polit. din Timişoara.
71. **Mărculescu Origen,** Profesor la Colegiul „Carol I", Craiova.
72. **Marinescu I.,** Doctor-Inginer. Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
73. **Mateescu S.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor onorar, Timişoara.
74. **Mereuţă Emilian,** Licenţiat în Matematici, Strada Vatra Luminoasă 89, Bucureşti IV.
75. **Mihăileanu N. N.** Profesor secundar, Bucureşti.
76. **Mioc V.** Licenţiat în Matematici, Directorul liceului Loga, Asistent pe lângă catedra de Analiza Matematică dela Şc. Polit. din Timişoara.
77. **Murgulescu Elena,** Licenţiată în Matematici, Asistentă la Şcoala Polit. din Timişoara.
78. **Murgulescu G. I.** Doctor în chimie. Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
79. **Musta Ştefan,** Profesor secundar Strada Pavel 4, Beiuş.
80. **Nadaşan Şt.,** Doctor-Inginer, Şef de lucrări la catedra de Rezistenţa Materialelor dela Şcoala Politechnică, Timişoara.
81. **Naneş Gh.** Profesor pensionar, Bucureşti.
82. **Nicolau A.** Inginer Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
83. **Nicolau P.,** Inginer, Profesor onorar, Timişoara.
84. **Ogrin N.** Doctor în Ştiinţele Comerciale, Conferenţiar la Şc. Polit. din Timişoara.
85. **Onicescu O.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, str. Clopotarii Vechi 25, Bucureşti.
86. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
87. **Orăşeanu Gr.,** Profesor secundar, Bucureşti.
88. **Patriciu Valeriu,** Doctor, Profesor la catedra de Geologie Economică şi Zăcăminte, la Şcoala Politechnică, Timişoara.
89. **Petrescu A.,** Profesor onorar, Bucureşti.
90. **Popescu E.,** Doctor în chimie, Profesor la Şcoala Politechnică, Bucureşti.
91. **Popescu I.,** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şcoala Polit. din Timişoara.
92. **Popescu N. Corneliu,** Profesor, Călăraşi.
93. **Predoescu I. M.,** Inginer la Societatea „Astra Română", Jud. Prahova.
94. **Protopopescu I.,** Inginer-Şef, Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
95. **Purcariu I.,** Doctor în Fizică, Profesor onorar, Bucureşti.
96. **Racliş N. R.,** Doctor în Matematici, Directorul Institutului Matematic Român, Profesor Bucureşti.
97. **Rădulet R.,** Doctor-Inginer, Profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.
98. **Roibănescu C.,** Profesor, Bucureşti.
99. **Sauciuc L.,** Doctor în chimie, Şef de lucrări la Catedra de Chimie dela Şc. Polit. din Timişoara.
100. **Savin C. Ion,** Licenţiat în Matematici, str. Sărăriei 56, Iaşi.
101. **Schileriu I.,** Inginer, Bucureşti.
102. **Schram Edith,** Inginer, Timişoara.
103. **Scărlătescu D.,** Inginer, Profesor la liceul industrial din Timişoara.
104. **Scorpan Al.,** Inginer, depoul C. F. R., Asistent la Şcoala Politechnică, Timişoara.
105. **Sergescu P.,** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Profesor la Universitatea din Cluj, 12 Str. Milano, Timişoara.
106. **Severineanu C.,** Inginer-Şef, Inspector General C. F. R., Profesor la Şc. Polit., Timişoara.
107. **Simionescu D. Gh.,** Licenţiat în Matematici, Profesor secundar, Bucureşti.
108. **Smighelschi O.,** Inginer la Fabrica „Nitrogen", Dicio-Sân-Martin.
109. **Stamatescu I.,** Profesor la Liceul „Matei Basarab" şi „Seminarul Pedagogic Universitar", Bucureşti.
110. **Stambuleanu A.,** Doctor-Inginer, Conferenţiar Şc. Politechnică, Timişoara.
111. **Stan A.,** Căpitan de Artilerie, licenţiat matematici, Bucureşti.
112. **Stăncescu C.,** Doctor-Inginer, Profesor onorar, Şc. Polit. Timişoara.
113. **Stantzel E.,** Inginer, Asistent pe lângă Catedra de Construcţii dela Şc. Polit., Timişoara.
114. **Stoicescu L.,** Inginer, Profesor la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini dela Şcoala Politechnică din Timişoara.
115. **Stoicescu M.,** Profesor la lic. „G. Lazăr", Bucureşti.
116. **Teodorescu C.,** Inginer-Şef, Rectorul Şcoalei Politechnice din Bucureşti.
117. **Teodosiu A.,** Doctor în Matematici, Profesor onorar, Timişoara.
118. **Ţino O.,** Doctor în Matematici, Profesor la Catedra de Geometrie Analitică dela Şc. Polit., Timişoara.
119. **Vâlcovici V.,** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului de perfecţionare al Şcoalei Politechnice din Timişoara, Str. Londra 44, Bucureşti.
120. **Viciu Aurel,** Profesor la lic. Milit., Timişoara.
121. **Vişa Eugen.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul din Arad.
122. **Vlad I. V.,** Doctor-Inginer, Decan Profesor la Şc. Polit. din Timişoara.
123. **Vlădescu I.,** Doctor-Inginer, Profesor la Şcoala Polit. din Timişoara.
124. **Zăgănescu I.,** Inginer la C. F. R. şi Profesor la Şc. Polit., Timişoara.
125. **Zaharia N. O.,** Profesor, Constanţa.
126. **Zapan Gr.,** Comandor-Aviator, Inginer de construcţii aeronautice şi mecanice (E. N. S. A. Paris), Şeful Serviciului Technic al Regiunii 3 Aeriene, str. Pasteur 44, Bucureşti 6.

ANUL XXII. APRILIE 1942 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

BIBLIOTECA CENTRALA ASOCIATIUNEA SIBIIU

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE" (URMARE).

2. **P. SERGESCU:** O PROBLEMA DE APLICATII GEOMETRICE ALE ANALIZEI MATEMATICE.

3. NOTE MATEMATICE: 4, 5.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 1195, 1859, 1872, 1887, 1895, 1896

6. PROBLEME PROPUSE: 2026 — 2033

7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institutul de Arte grafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Din cauza scumpirei hârtiei şi a tiparului am fost obligaţi a mări costul abonamentului pentru anul 1942 la 180 (una sută optzeci) lei.

„R. M. T." aduce vii mulţumiri D-lui Profesor *Ilie Popescu* Decanul Facultăţii de Mine, pentru suma de 1000 (una mie) lei, donată în sprijinul revistei noastre, al cărei membru şi susţinător este.

Avem plăcerea să anunţăm că începând de la 15 Aprilie 1942, mai face parte dintre membrii *„Revistei Matematice din Timişoara"* şi D-nul *Petre Murariu*, profesor la liceul militar, *„Mihai Viteazul"*, Timişoara, strada *I. Vulcan 9.*

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — NO. 2 TIMISOARA, APRILIE 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE"

DE

V. ALACI.

(urmare)

Alte configurații interesante.

26. Vom continua să tratăm tot sub formă de probleme, alte *configurații curbilinii.*

Vom regăsi în acest domeniu de aplicații unele *curbe clasice,* pentru care vom da noui definiții simple și noui metode de a le construi prin puncte, numai cu rigla și compasul.

Astfel va apare din ce în ce mai clar rolul important al *coordonatelor rombice.*

27. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație rombică*

$$r = a\,cp\,2\theta, \qquad (a>0), \tag{65}$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi = 90^0$.

Prima soluție. Schimbând θ în $-\theta$, sau în $\pi+\theta$, observăm că r rămâne același, de unde rezultă simetria configurației (65) față de axa $x'x$ și de origina O, într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$.

Vom construi dar configurația (65) întâi în primul cadran, vom lua simetrica părței aflate față de axa $x'x$ și apoi simetricile părților obținute față de origina O.

Evident că, în primul cadran, r este pozitiv numai pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Acum efectuăm următoarea construcție:

Luăm pe semi-axele Ox, Oy *segmentele*

$$OA = OB = a,$$

iar pe segmentul de dreaptă AB *luăm un punct* M *pe care îl proiectăm ortogonal în* M_1 *pe axa* $x'x$.

Intersecția P *a lui* MM_1 *cu bisectoarea unghiului* xOM, *aparține configurației* (65), (fig. 18).

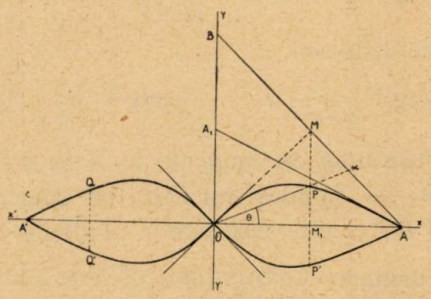


Fig. 18.

Pentru a motiva această afirmare, vom nota întâi

$$\sphericalangle xOM = 2\theta, \qquad \text{deci} \qquad \sphericalangle xOP = \theta$$

și vom arăta că, *coordonatele rombice* ale punctului P, care pe figură sunt

$$r = OM_1, \qquad \theta = \sphericalangle xOP, \qquad 90^0 = \varphi$$

satisfac ecuația (65).

În adevăr, în triunghiul dreptunghic OM_1M, *teorema I-a* de la triunghiurile dreptunghice din *„Trig. patratică"*, ne dă

$$OM_1 = (OM_1 + M_1M)\,cp\,2\theta = a\,cp\,2\theta,$$

sau

$$r = a\,cp\,2\theta,$$

tocmai ecuația (65). Punctul P a fost astfel bine determinat.

Făcând să varieze θ în primul cadran, obținem analog lui P alte puncte, care unite ne dau arcul APO. Intregind acest arc cu simetricul său AP'O față de axa $x'x$ și apoi luând simetricele față de origină ale arcelor APO, AP'O, obținem întreaga configurație cerută.

Pentru a trasa mai precis arcul APO, putem determina în fiecare punct al său și tangenta co-

respunzătoare, folosind formula (20) care pentru primul cadran şi $\varphi = 90^0$, devine

$$\text{(66)} \qquad \operatorname{cotg} V = \frac{r'}{r} + \operatorname{tg}\theta.$$

Cum în primul cadran, din (65) avem prin derivare

$$r' = -2a(sp^2 2\theta + cp^2 2\theta),$$

conform formulei de derivare (50) din *„Trig. patratică“*, relaţia (66) devine

$$\operatorname{cotg} V = -2\frac{sp^2 2\theta + cp^2 2\theta}{cp\, 2\theta} + \operatorname{tg}\theta.$$

De aci deducem

$$\left|\operatorname{cotg} V\right|_{\theta=0} = -2, \qquad \left|\operatorname{cotg} V\right|_{\theta=45^0} = -\infty.$$

ceeace înseamnă că, tangenta în A la arcul A P O este $A A_1$ (A_1 mijlocul lui O B), iar tangenta în O la arcul A P O este bisectoarea unghiului $x O y$.

Prin urmare: *Configuraţia* (65) *este formată din ovalele* A P O P′ A, A′ Q O Q′ A′, *cu punctele unghiulare* A, O, A′.

Soluţia 2-a. Să transpunem *ecuaţia rombică* (65) în *coordonate rectangulare*, dar numai când 2θ variază în primul cadran, deci $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, fiindcă am arătat în prima soluţie simetria configuraţiei (65) faţă de axa $x' x$ şi origina O.

Pentru aceasta vom observa întâi că ecuaţia (65), în baza formulei de înmulţire (29), din *„Trig. patratică“*, p. 23, se mai poate scri

$$\text{(67)} \qquad r = a\frac{1 - 2\,sp\,\theta}{1 - 2\,sp^2\theta}, \quad \text{pentru} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Cum pentru primul cadran formulele (9′) ne dau

$$r = x, \qquad sp\,\theta = \frac{y}{x + y},$$

rezultă că ecuaţia (67) devine

$$\text{(65′)} \qquad x(x^2 + 2xy - y^2) = a(x^2 - y^2).$$

Din această cubică, cu trei direcţii asimptotice reale, noi vom reţine numai arcul A P O *din primul cadran. Intregind arcul* A P O *cu simetricul său* A P′ O *faţă de axa* $x' x$ *şi apoi cu simetricele acestor arce faţă de origină, obţinem complect configuraţia* (65).

Observare importantă. Dacă în construcţia din prima soluţie îndepărtăm restricţia impusă de structura *ecuaţiei rombice* (65), anume aceea ca M să fie situat numai pe segmentul de dreapta A B, situându-l în orice punct al dreptei A B, atunci putem enunţa următoarea problemă de *geometrie analitică*.

Problemă. *Pe axele rectangulare* $x' x$, $y' y$ *cu origina în* O *se iau segmentele*

$$O A = O B = a$$

şi pe dreapta A B *se ia un punct oarecare* M.

Se cere locul geometric al punctului P, *intersecţia perpendicularei* $M M_1$ *pe axa* $x' x$ *cu bisectoarea* O α *a unghiului* x O M, fig. 18.

Soluţie analitică. Dacă notăm

$$\sphericalangle\, x O M = 2\theta, \qquad \text{deci} \qquad \sphericalangle\, x O \alpha = \theta,$$

atunci se vede că M poate fi considerat ca intersecţia dreptelor A B, O M de ecuaţii,

$$\begin{cases} x + y = a \\ y = x \operatorname{tg} 2\theta \end{cases}$$

de unde deducem

$$x = \frac{a}{1 + \operatorname{tg} 2\theta} = a\frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{1 + 2\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^2\theta}.$$

De altă parte, observăm că P este intersecţia dreptelor $M M_1$, O α de ecuaţii

$$\begin{cases} x = a\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{1 + 2\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^2\theta} \\ y = x \operatorname{tg}\theta. \end{cases}$$

Eliminând θ între aceste ecuaţii, *găsim că locul lui* P *este cubica*

$$\text{(68)} \qquad x(x^2 + 2xy - y^2) = a(x^2 - y^2).$$

Observare. Dacă în problema aci tratată, am înlocui numai dreapta A B, de ecuaţie $x + y = a$, printr'o dreaptă oare care

$$a x + b y = c,$$

atunci am găsi analog că, locul lui P este *cubica* mai generală

$$\text{(69)} \qquad x[a(x^2 - y^2) + 2bxy] = c(x^2 \quad y^2).$$

O metodă remarcabilă de construcţie.

28. Dacă s'ar cere să construim prin puncte *cubica*

(70) $$x(x^2 + 2xy - y^2) = a(x^2 - y^2)$$

ar fi foarte greu, sau chiar imposibil, cu mijloacele obicinuite.

Folosind însă *coordonatele rombice*, construcţia prin puncte a *cubicei* (70) este foarte simplă În adevăr, transpunând ecuaţia (70) în *coordonate rombice*, ceea ce facem uşor cu ajutorul formulelor (9'), găsim că ea este echivalentă, pentru primul cadran, cu ecuaţia

$$r(r^2 + 2r^2 \operatorname{tg}\theta - r^2 \operatorname{tg}\theta = a(r^2 - r^2 \operatorname{tg}^2\theta).$$

De aci deducem

$$r = \frac{a}{1 + \dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{a}{1 + \operatorname{tg} 2\theta},$$

sau

(71) $$r = a\,cp\,2\theta,$$

în virtutea formulei corespunzătoare, pentru primul cadran, din tabloul (11) *„Trig. patratică"*, p. 11.

Dar în problema de la No. 27, noi am dat în prima soluţie construcţia prin puncte, pentru primul cadran, a *ecuaţiei rombice* (71).

Curba (70) fiind *analitică*, odată ce avem o metodă de construcţie pentru o porţiune a ei, această metodă folosită fără nici o restricţie, (aceea ca M să fie situat numai pe segmentul AB, M putând fi orice punct al dreptei AB), ne dă în întregime *cubica* (70).

Mai general: *cubica*

(72) $$x[a(x^2 - y^2) + 2bxy] = c(x^2 - y^2),$$

(presupunând a, b, c pozitivi), se poate construi uşor prin puncte, căci transpunând-o în *coordonate rombice*, în baza formulelor (9') ea devine pentru primul cadran, procedând ca mai sus,

(73) $$r = \frac{c}{a + b\operatorname{tg} 2\theta}$$

şi construcţia se face în felul următor:

Intr'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *trasăm dreapta* AB *de ecuaţie*

$$ax + by = c,$$

luăm un punct M *pe segmentul* AB *şi intersecţia* P *a perpendicularei* MM_1 *pe axa* $x'x$ *cu bisectoarea unghiului* xOM, *aparţine configuraţiei (73)*, (fig. 19).

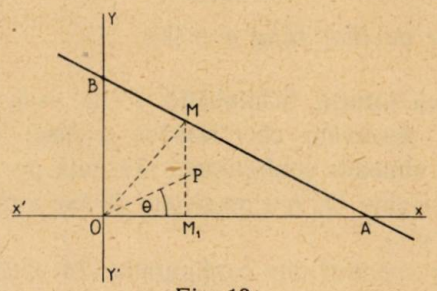


Fig 19.

In adevăr, dacă notăm

$$\sphericalangle xOM = 2\theta, \quad \text{deci} \quad \sphericalangle xOP = \theta$$

atunci se vede că, *coordonatele rombice* ale punctului P sunt

$$r = OM_1 \qquad \theta = \sphericalangle xOP, \qquad 90^0 = \varphi$$

şi ele satisfac ecuaţia (73) fiindcă MM_1 fiind paralelă cu OB, avem

$$\frac{OM_1}{OA} = \frac{OB - M_1M}{OB},$$

sau

$$\frac{\dfrac{r}{c}}{\dfrac{a}{b}} = \frac{\dfrac{c}{b} - r\operatorname{tg} 2\theta}{\dfrac{c}{b}}$$

şi de aci deducem tocmai ecuaţia (73).

Indepărtând restricţia ca M să fie situat numai pe segmentul AB, el putând fi orice punct al dreptei AB, *găsim că locul punctului* P *este cubica* (72).

Nu ne oprim asupra particularităţilor *cubicei* (72) ce ar rezulta din construcţia de mai sus.

Observare. Această metodă, de a transpune o *ecuaţie analitică* în *ecuaţia rombică* echivalentă (de fapt sunt două) şi apoi de a le construi prin puncte, ceea ce se face cu uşurinţă, constitue *o metodă nouă şi simplă* care se va impune şi pe care o vom mai folosi încă în cele ce urmează.

Strofoida rombică.

29. **Problemă.** *Se cere configuraţia de ecuaţie rombică*

(74) $$r = a\cos 2\theta, \qquad (a > 0),$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi = 90^0$.

Prima soluţie. Schimbând θ în $-\theta$, sau în $\pi + \theta$, observăm că r rămâne acelaşi, de unde rezultă simetria configuraţiei (74) faţă de axa $x'x$ şi de origina O, într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$.

Vom construi dar configuraţia (74) întâi în primul cadran, vom lua simetrica părţei aflate faţă de axa $x'x$ şi apoi simetricele părţilor obţinute faţă de origina O. Evident că, în primul cadran r este pozitiv numai pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Acum efectuăm următoarea construcţie:

Din O *ca centru, cu o rază egală cu a descriem în primul cadran sfertul de cerc* A B *şi luăm pe el un punct oarecare* M *pe care îl proiectăm ortogonal în* M_1 *pe axa* $x'x$.

Intersecţia P *a dreptei* MM_1 *cu bisectoarea unghiului* x O M, *aparţine configuraţiei* (74), fig. 20.

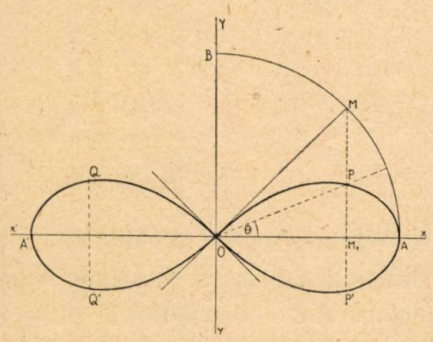


Fig 20.

In adevăr, dacă notăm

$$\sphericalangle x\,O\,M = 2\theta, \qquad \text{deci } \sphericalangle x\,O\,P = \theta,$$

atunci se vede că, *coordonatele rombice* ale punctului P sunt

$$r = O\,M_1, \qquad \theta = \sphericalangle x\,O\,P, \qquad 90^0 = \varphi$$

şi ele satisfac ecuaţia (74), fiindcă din triunghiul dreptunghic $O\,M_1\,M$, avem

$$O\,M_1 = O\,M\cos 2\theta,$$

sau

$$r = a\cos 2\theta.$$

Punctul P a fost astfel bine definit.

Făcând să varieze θ în primul cadran, obţinem analog lui P alte puncte, care unite ne dau arcul A P O. Intregind acest arc cu simetricul său A P' O faţă de axa $x'x$ şi apoi luând simetricele faţă de origina O ale arcelor A P O, A P' O, obţinem întreaga configuraţie cerută.

Pentru a trasa mai precis arcul A P O, putem determina în fiecare punct al său şi tangenta corespunzătoare, folosind formula (20), care pentru primul cadran şi $\varphi = 90^0$ devine

(75) $$\operatorname{cotg} V = \frac{r'}{r} + \operatorname{tg}\theta.$$

Cum derivata în raport cu θ a lui r din ecuaţia (74) este

$$r' = -2a\sin 2\theta,$$

relaţia (75) devine

$$\operatorname{cotg} V = -2\operatorname{tg} 2\theta + \operatorname{tg}\theta.$$

De aci deducem

$$\left|\operatorname{cotg} V\right|_{\theta=0} = 0, \qquad \left|\operatorname{cotg} V\right|_{0=45^0} = -\infty,$$

ceeace înseamnă că, tangenta în A la arcul A P O este o perpendiculară în A la axa $x'x$, iar tangenta în O la arcul A P O este bisectoare unghiului xOy.

Prin urmare: *Configuraţia* (74) *este astfel formată din buclele* A P O P' A, A' Q O Q' A', (fig. 20).

Soluţia 2-a. Să transpunem *ecuaţia rombică* (74) în *coordonate rectangulare*, dar numai pentru primul cadran, fiindcă din prima soluţie de mai sus am văzut că, configuraţia (74) este simetrică faţă de axa $x'x$ şi de origina O.

În baza formulelor (9'), considerate pentru primul cadran, ecuaţia (74) care se mai poate scri

$$r = a\,\frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta},$$

devine

(74') $$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2).$$

Din această *cubică*, cunoscută în *geometria analitică* sub numele de *strofoida dreaptă*, vom reține evident numai arcul A P O din primul cadran.

Complectând arcul A P O *cu simetricul său* A P' O *față de axa* $x'x$, *construind apoi și simetricele acestor arce față de origina* O, *obținem în întregime configurația cerută.*

Configurația (74) am numit-o **strofoidă rombică**, din cauza *ecuației sale rombice* și este formată din două bucle de *strofoidă*. Ea se aseamănă cu *lemniscata.*

Observare. Ținem încă să relevăm că, *ecuația rombică* (74), în cazul $a < 0$, reprezintă cele două ramuri infinite ale *strofoidei* (74'), complectate cu simetricele lor față de origina O.

Nu inzistăm mai mult asupra acestei observări, care ar merita totuși o justificare, de altfel ușor de motivat.

Observare importantă. Dacă în construcția din prima soluție îndepărtăm restricția impusă de structura ecuației (74), anume aceea ca punctul M să fie situat numai pe sfertul de cerc A B, (el putând fi situat în orice punct al cercului O de rază a), atunci putem enunța următoarea problemă de *geometrie analitică* sau *geometrie pură.*

Problemă. *Din* O — *origina unui sistem de axe rectangulare* $x'x$, $y'y$ — *descriem un cerc de rază* a *și luăm pe el un punct oarecare* M *pe care îl proectăm ortogonal pe axa* $x'x$ *în* M_1.

Se cere locul geometric al punctului P, *intersecția dreptei* MM_1 *cu bisectoarea* $O\alpha$ *a unghiului* x O M.

Soluție analitică. Dacă notăm

$$\sphericalangle x\,O\,M = 2\theta, \qquad \text{deci } \sphericalangle x\,O\,\alpha = \theta,$$

atunci coordonatele (x, y) ale punctului P, trebuie să satisfacă simultan ecuațiile dreptelor MM_1, $O\alpha$, care sunt

$$\begin{cases} x = a\cos 2\theta = a\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} \\ y = x\operatorname{tg}\theta \end{cases}$$

Eliminând θ între aceste ecuații, obținem

(76) $$x(x^2+y^2) = a(x^2-y^2).$$

Locul lui P *este astfel strofoida dreapta* (76), (fig. 21).

Observare. *Construcția din enunțul acestei probleme, poate servi ca o nouă definiție simplă pentru strofoida dreaptă.*

Soluție geometrică. Unim A cu P și fie C intersecția lui A P cu axa $y'y$. OC fiind paralelă cu MM_1, rezultă

$$\sphericalangle C\,O\,P = \sphericalangle M\,P\,\alpha;$$

dar

$$\sphericalangle M\,P\,\alpha = \sphericalangle \alpha\,P\,A = \sphericalangle C\,P\,O,$$

fiindcă $O\alpha$ este bisectoarea unghiului A O M.

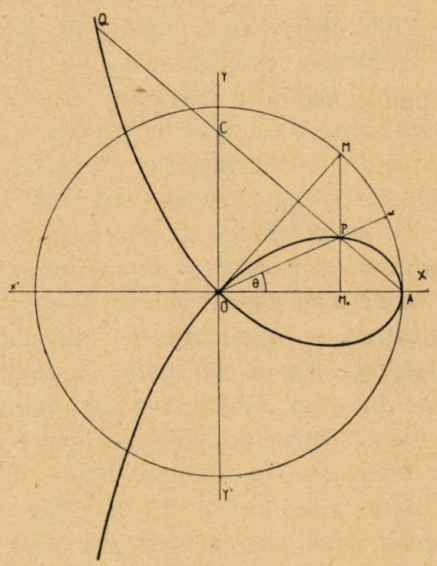


Fig. 21.

De aci deducem

$$\sphericalangle C\,O\,P = \sphericalangle C\,P\,O,$$

deci triunghiul O C P este isoscel și prin urmare

$$O\,C = P\,C.$$

Dar, dacă din punctul fix A *se duce dreapta variabilă* A C (C *pe axa* $y'y$) *și pe ea se ia segmentul*

$$C\,P = O\,C,$$

atunci se știe că locul lui P *este o strofoidă dreaptă, după însăși definiția clasică a acestei curbe.*

(Va urma)

O PROBLEMĂ DE APLICAȚII GEOMETRICE ALE ANALIZEI MATEMATICE

DE

P. SERGESCU

(Profesor la Universitatea din Cluj).

După ce *Leibniz* a făcut cunoscută metoda „sa" diferențială, printr'un articol scurt și greu de înțeles, în *Acta Eruditorum* în 1684, numai puțini matematicieni au simțit însemnătatea ideilor celor noui. In fruntea lor erau frații *Iacob* și *Ion Bernoulli* și marchizul *G. de l'Hospital*. Timp de vreo două zeci de ani *Leibniz* și acești discipoli ai săi au luptat, în felurite forme, pentru triumful Calculului Diferențial, care n'a fost unanim adoptat de cât către 1705. Mijloacele de luptă erau: articole de lămuriri, probleme propuse care nu puteau fi rezolvate prin metodele algebrice clasice, premii pentru rezolvarea acestui fel de probleme, articole de laudă pentru matematicienii cari și-au însușit noua metodă, polemici uneori foarte violente, etc. In 1696 *G. de l'Hospital* a tipărit primul tratat de calcul diferențial, *Analyse des infiniment petits*, scris pe înțelesul matematicienilor de atunci, carte care a jucat un rol important în difuziunea analizei matematice. Pe de altă parte *G. de l'Hospital* a publicat în *Acta Eruditorum* și *Journal des Savants* multe probleme propuse, sau rezolvate, de calcul diferențial. In șase ani 1693—1699, găsim în *Acta Eruditorum* 12 articole ale lui *de l'Hospital*, privitoare la nouă probleme.

Moartea prea timpurie, la 43 de ani, a lui *G. de l'Hospital* (1661 — 2 Febr. 1704) a întrerupt această activitate rodnică. In *Journal des Savants* 1692, *de l'Hospital* a publicat patru articole de calcul diferențial, semnându-le G***; între ele e vorba de curba lui *de Beaune*. de ecuație diferențială $(y-x)\,dy = a\,dx$ (in 1703 *Rémond de Montmort* reia problema atribuind lui *de l'Hospital* articolul din 1692, ceea ce mi-a permis să identific pe autorul G***). In 1693. *G. de l'Hospital* se ocupă de o problemă de geometrie diferențială propusă de *Ion Bernoulli*.

Problema prezintă interes în sine și din punct de vedere istoric, căci e una din cele mai vechi probleme de geometrie rezolvată prin integrarea unei *ecuații diferențiale*. Adaug că pe vremea aceea *nu se cunoștea* încă o metodă generală pentru integrarea fracțiilor în care figurează radicalul patrat al unui polinom de gradul al doilea. După notele pe care le-am luat din *Journal des Savants* 1694 problema are următorul enunț.

Problema A. *Să se afle curbele plane pentru care raportul dintre segmentul* M T *al tangentei cuprins între* M *și intersecția* T *cu* O *x și dintre* O T *e constant. In particular se consideră cazul când acest raport e* 2.

D-l *Gino Loria* studiază în *Archeion* XXIII, 1941, pag. 1—35 articolele de matematică tipărite în faimoasa revistă din Leipzig *Acta Eruditorum* între 1682 și 1740. Coïncidențele cu notele mele din *Journal des Savants* mă fac să regăsesc la D-l *Loria* problema A sub o variantă, pe care o voiu numi problema B.

Problema B. *Să se afle curbele plane pentru care raportul dintre segmentul* M T *al tangentei cuprins între* M *și intersecția* T *cu* O *x și dintre abscisa lui* M *e constant. In particular se consideră cazul când acest raport e* 2.

Imprejurările actuale nu-mi îngâdue să recitesc în Biblioteca Națională din Paris, colecția lui *Journal des Savants*, și nici să văd, deocamdată, vreun volum din *Acta Eruditorum*, așa că nu-mi pot da seama care din enunțuri e cel original. De altfel, toate citatele din *Acta Eruditorum* le fac după D-l *Loria*.

Ion Bernoulli a propus problema în *Acta Eruditorum* 1693 pag. 234 – 235 într'un articol în care se ocupă de curba lui *De Baune*. *G. de l'Hospital* rezolvă problema foarte repede, căci îi publică soluția la 30 Iunie 1693 în *Mémoires de Mathématiques et de Physique de l'Académie Royale des Sciences de Paris*. Soluția e reprodusă în *Acta Eruditorum* 1693 pag. 398—399, unde a publicat la pag. 255—256 și *Jacob Bernoulli* o soluție. Curba dată de *l'Hospital* e:

$$y^4 + x^2y^2 \mp b\,x\,y^2 \mp 16\,b\,x^3 = 27\,b^2\,y^2.$$

In *Journal des Savants* 1694, pag, 146—150, un anonim, pe care n'am reușit să-l identific, publică o întâmpinare: „Difficulté sur la solution d'un problème de M. *Bernoulli*". El ajunge la altă familie de curbe și pune — „très humblement" — intrebarea de unde vine nepotrivirea. Intâm-

pinarea a fost reprodusă şi în *Acta Eruditorum* 1694 pag. 196—200 şi a atras o replică imediată şi aspră (neiscălită) din partea lui *de l'Hospital* în *Journal des Savants* 1694 pag. 182—183 şi *Acte Eruditorum* 1694 pag, 387—391. Autorul arată că dacă se fac calculele până la capăt, una din ecuaţii împarte pe cealaltă, deci ele reprezintă aceiaş curbă;

Insuşi *Leibniz* intervine în discuţie printr'un articol cu titlul „Considérations sur la différence qu'il y a entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendantes", pe care-l publică în *Journal des Savants* 1694 pag. 404—406. *Leibniz* declară că el socoteşte noul calcul infinitezimal mai folositor de cât rezolvarea ecuaţiei de gradul al cincilea sau a problemelor lui *Diofante.* Apoi continuă:

„Messieurs *Bernoulli* ont été les premiers qui ont témoigné publiquement avec un très grand succès combien ils l'avaient trouvé propre pour résoudre des problèmes physico-mathématiques dont la porte paraissait fermée auparavant. M. le marquis *de l'Hospital* y a pris goût aussi en ayant donné des beaux échantillons; et enfin M. *Huyghens* lui même et a reconnu et approuvé la conséquence. Il faut rendre cette justice à M. *Newton* (à qui la Géométrie, l'Optique et l'Astronomie ont des grandes obligations) qu'encore en ceci il y a eu quelque chose de semblable de son chef, suivant ce qu'on a su depuis". In fine *Leibniz* afirmă că analiza infinitezimală poate rezolva probleme mai generale de cât aceea a lui *Ion Bernoulli,* şi anume: *Dându-se raportul dintre două funcţiuni oarecare ale curbei (coarda, subtangenta, subnormala, normala, tangenta, abscisa, ordonata, etc.), se poate găsi curba.* Căci: „ce *Calculus differentialis* sert non seulement aux différences, mais encore aux sommes qui sont la réciproque (integralele) de ces différences à peu près comme le calcul ordinaire ne sert pas seulement aux puissances, mais encore aux racines qui sont la réciproque des puissances".

După cum se vede, problema care ne ocupă a format un obiect de studiu al făuritorului calculului diferenţial, *Leibniz,* şi al primilor pionieri ai acestui calcul *Jacob* şi *Ion Bernoulli* şi *G. de l'Hospital.* Ea a fost tratată în cele mai de seamă reviste ştiinţifice ale epocei: *Memoriile Academiei de Ştiinţe din Paris, Acta Eruditorum* şi *Journal des Savants, înainte* de apariţia (în 1696) a primului tratat de Calcul Diferenţial (al lui *de l'Hospital*). Se vede deci că problema lui *Ion Bernoulli* a jucat un rol mare în începuturile calculului infinitezimal.

Îmi propun să-i dau o soluţie, pentru cititorii R. M T., soluţie care a fost desvoltată într'o şedinţă din Ianuarie 1942 a Seminarului pentru învăţământul matematicii al Universităţii din Cluj (provizoriu la Timişoara). Mă mărginesc la cazul când valoarea raportului constant este 2 şi voiu face calculele pentru ambele variante A şi B.

Ecuaţia tangentei M T este

$$Y - y = y'(X - x)$$

aşa că coordonatele lui T sunt:

$$(x - \frac{y}{y'}, 0) \text{ şi } \overline{MT}^2 = y^2 \frac{(1 + y'^2)}{y'^2}.$$

Pentru **Problema A** ecuaţia diferenţială este

$$y^2(1 + y'^2) = 4(xy' - y)^2$$

$$y'^2(4x^2 - y^2) - 8xyy' + 3y^2 = 0$$

$$y' = \frac{4xy \pm \sqrt{4x^2y^2 + 3y^4}}{4x^2 - y^2}.$$

Dacă facem substituţia $y = ux$ obţinem:

$$\frac{dx}{x} = \frac{4 - u^2}{u(u^2 \pm \sqrt{4 + 3u^2})} du.$$

Punem acum

$$4 + 3u^2 = v^2$$

deci

$$\frac{dx}{x} = \frac{(16 - v^2)v\,dv}{(v^2 - 4)(v^2 \pm 3v - 4)}.$$

Mărginindu-ne la curbele care corespund semnului + din dublul semn ± de la numitor, avem

$$\frac{dx}{x} = \frac{(4v - v^2)dv}{(v-1)(v-2)(v+2)} = \frac{-dv}{v-1} + \frac{dv}{v-2} - \frac{dv}{v+2}$$

$$\frac{x}{9c} = \frac{v-2}{v^2 + v - 2}$$

$$\frac{v^2}{v-2} = \frac{9c}{x} - 1 = \frac{9c - x}{x},$$

$$v = \frac{xv^2 - 2x + 18c}{x(9c - x)} = \frac{2x^2 + 3y^2 + 18cx}{x(9c - x)},$$

$(9c - x)^2 (4x^2 + 3y^2) = (2x^2 + 3y^2 + 18cx)^2$

Efectuând calculele, obținem familia de curbe:

$$y^4 + x^2 y^2 + 18cxy^2 + 16cx^3 = 27c^2 y^2.$$

Ecuația aceasta coïncide cu cea dată de *l'Hospital* și amintită de anonim în *Journal des Savants* 1694, pag. 146 — 150, afară de coeficientul lui xy^2. Se poate ca în transcrierea notelor mele, să fi omis coeficientul 18, se poate ca în revistă să fie o greșeală de tipar. Nu-mi pot da seama fiindcă nu am la dispoziție în țară colecția revistei. In orice caz, coïncidența soluției dovedește că problema tratată de *l'Hospital* e *problema A*. Ar urma că varianta B — „curva per cui e costante il rapporto fra la tangente l'ascissa di un punte qualunque" (*Loria, Archeion* 1941, pag. 16) — nu corespunde problemei propuse de *Ion Bernoulli*.

Problema B. Ecuația diferențială este;

$$y^2 (1 + y'^2) = 4x^2 y'^2,$$

$$y' = \frac{\pm y}{\sqrt{4x^2 - y^2}}$$

ecuație omogenă de ordinul întâi. Făcând succesiv substituțiile

$$y = ux \qquad 4 - u^2 = v^2,$$

ecuația devine

$$\frac{dx}{x} = \frac{\pm \sqrt{4-u^2}\, du}{u[1 \mp \sqrt{4-u^2}]} = \frac{\mp v^2\, dv}{(4-v^2)(1 \mp v)} = \frac{dv}{3(v \mp 1)} - \frac{dv}{(v \mp 2)} - \frac{dv}{3(v \pm 2)}$$

și prin urmare, făcând toate reducerile, familia de curbe căutată este:

$$c^2 y^8 \pm 16Cx^3 y^2 \mp 6Cxy^4 + y^2 - 3x^2 = 0$$

De fapt parametrul C fiind arbitrar, ecuația se reduce la

$$c^2 y^8 + 16Cx^3 y^2 - 6Cxy^4 + y^2 - 3x^2 = 0.$$

Observare. In cazul când raportul constant e presupus egal cu 1 problema A admite ca soluții: dreptele paralele cu Ox și cercurile tangente în origină la Ox.

In aceiaș ipoteză particulară, problema A conduce la o familie de curbe transcedente (când segmentul „tangentă" e egal cu abscisa):

$$Cy^2 (\sqrt{x^2 - y^2} - x)^2 = e^{\frac{2x}{\sqrt{x^2-y^2} - x}}.$$

NOTE MATEMATICE

4 — *Dans un système de numération de base* B, *les nombres* $(B-1)(B+1)^2$ et $(B-1)^2(B+1)^2$ *sont formés des mêmes chiffres écrits dans un ordre inverse,*

$$(B-1)(B+1)^2 = 1\ 0\ \overline{B-2}\ \overline{B-1}$$

$$(B-1)^2(B+1)^2 = \overline{B-1}\ \overline{B-2}\ 0\ 1.$$

Exemple : B = 9

$$800 = 1078_9; \qquad 6400 = 8701_9.$$

Il en résulte que si $B = n^2+1$, dans ce système de numération, les carrés des nombres $n(n^2+2)$ et $n^2(n^2+2)$ sont formés des mêmes chiffres écrits dans un ordre inverse.

Exemples :

$B = 5$, $12^2 = 1034_5$; $4301_5 = 24^2$,

$B = 10$, $33^2 = 1089$; $9801 = 99^2$,

$B = 17$, $72^2 = 10\,\overline{15}\,\overline{16}_{17}$; $\overline{16}\,\overline{15}\,01_{17} = 288^2$.

Dans le système de base 2, les deux carrés se confondent dans le carré polindrome $1001_2 = 3^2$.

Des carrés de 4 chiffres tels qu'ils donnent encore un carré lorsqu'on écrit les chiffres dans un ordre inverse n'existent pas seulement dans les systèmes de base $B = n^2 + 1$.

Exemple : B = 9

$$58^2 = 4547_9; \qquad 7454_9 = 74^2.$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

5. — *O limită superioară a bisectoarei într'un triunghi.*

În articolul „O proprietate a bisectoarei într'un triunghi" (An. XXI, Nr. 7, pag. 82), D-l Prof. *O. N. Țino* dă o nouă demonstrație elementară a propoziției: *o bisectoare interioară a unui triunghi este mai mică decât media aritmetică a laturilor adiacente,* arătând în acelaș timp că *media geometrică* a laturilor adiacente este încă o limită superioară (mai bună) a bisectoarei.

Ne propunem să demonstrăm că *bisectoarea interioară a unui triunghi este mai mică decât* **media armonică** *a laturilor adiacente.*

Cum media armonică este mai mică decât cea geometrică, această propoziție oferă o nouă îmbunătățire a limitei superioare a bisectoarei

Fie AI bisectoarea unghiului A și b, c, laturile adiacente $\overline{AC}$ și $\overline{AB}$. Se știe că avem

$$\overline{AI} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}\,.$$

Insă această formulă poate fi scrisă

$$\frac{2}{\overline{AI}} = \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

iar

$$\frac{bc}{p(p-a)} = \frac{4bc}{(b+c)^2-a^2} > 1,$$

căci

$$4bc-(b+c)^2+a^2 = a^2-(b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c) > 0$$

din cauza inegalităților cunoscute

$$a+b>c \quad , \quad a+c>b.$$

Urmează, deci, că

$$\frac{2}{\overline{AI}} > \frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

adică

$$\overline{AI} < \frac{2bc}{b+c}$$

P. B. BOLDESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVII, No. 7, Martie 1942. Matematică românească în *Transnistria* (urmare și sfârșit), de *I. Ionescu*. Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plautius Andronescu*. Asupra mișcării tautocrone plane, de *Radu Bădescu*. Raportul comisiuni pentru premiul de aritmetică, G-l *Gh. Buiciiu, Ion Ionescu*, C-dor *I. Linteș*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Știință și Progres*, Revista liceelor militare. Cuvânt înainte. † *Nicolae Iorga*, de *Alexandru Lăpedatu*. Țara lui „Soare-răsare", de Prof. *N. Goicu*. Plantele se nutresc și cresc după legi matematice, de *Amilcar Vasiliu*. Hipofiza un organ plin de enigmă, de Prof. *Alex. Demian*. Esențe și parfuri, de *G. N Gheorghiu*. Câteva din înfăptuirile universității de la Cluj, de *Petre Sergescu* Ce sunt indiile olandeze?, de *Ionescu-Pelican* Elementele chimice necesare vieții, de *Horia Sluşanschi*. Necesitatea organizării unui serviciu seismic modern în România, de *Ioan Curea*. *Fr. Viète*, părintele algebrei moderne, de *Victor Marian*. O clasă de neegalități, de *Th. Angheluță*. Asupra unor neegalități, de *Bal Lascu*. Probleme propuse.

Articolele publicate în acest număr, vor interesa pe cititori și ne exprimăm mulțumirea despre reapariția acestei reviste

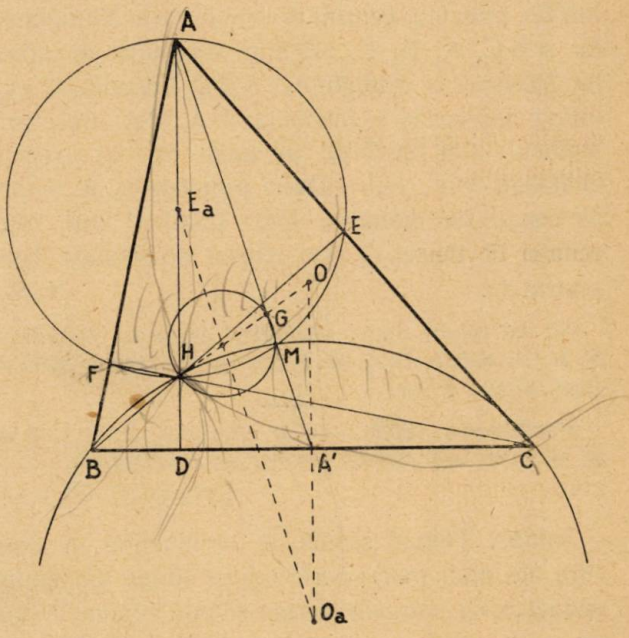
3. *Valer Novacu*. Contribuțiuni la Mecanica ondulatoare a fotonului (teză de doctorat).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1195. — *În triunghiul* ABC *fie* H *ortocentrul*, G *centrul de greutate*, D, E, F *picioarele înălțimilor care pleacă respectiv din* A, B, C. *Perechile de cercuri* (BHC, EHF), (CHA, FHD), (AHB, DHE) *se taie a doua oară în* M, N, P. *Să se arate că punctele* M, N, P, H, G *sunt situate pe un cerc.*

CEZAR COSNITA

Fie A′ mijlocul laturii BC, E_a mijlocul lui AH și O_a simetricul centrului O față de BC. Se știe că AH = 2OA′, deci AE_a egală și paralelă cu $A'O_a$. Se știe că BHC este simetricul față de BC al cercului ABC, deci O_a este centrul cercului BHC. Cercurile AFHE și BHC au centrele în E_a și O_a și cum au un punct de intersecție în H, al doilea punct M de intersecție al lor este simetricul lui H față de linia centrelor E_aO_a. E_a fiind mijlocul lui AH și AA′ fiind paralelă cu E_aO_a, atunci simetricul M al lui H față de E_aO_a este pe mediana AA′. G fiind pe această mediană și unghiul HMG fiind drept, urmează că M este pe cercul de diametru HO. În mod analog se vede



că şi punctele N, P sunt pe acelaşi cerc, numit de *Tucker cerc ortocentroidal*[1].

D-l *Mihăileanu N. N* dă următoarea generalizare. *Fie* P *un punct din planul triunghiului* A B C, *situat pe cubica lui Darboux*, A′ B′ C′ *triunghiul său podar* (A′, B′, C′ proiecţiile lui P pe B C, C A, A B), A_1 B_1 C_1 *triunghiul lui antipodar* (B_1 C_1, C_1 A_1, A_1 B_1 respectiv perpendiculare pe P A, P B, P C). *Cercurile* (A B′ C′, P B C), . . . *se taie în* α, β, γ. *Punctele* α, β, γ, P *şi centrul de omologie al triunghiurilor* A B C, A_1 B_1 C_1 *sunt pe acelaşi cerc*. Fie a, O_a centrele cercurilor A B′ C′, B P C, mijloacele segmentelor A P, A_1 P. Pentruca punctele α, β, γ să fie pe acelaşi cerc cu P, trebue ca mediatoarele (perpendicularele pe mijloacele) segmentelor P α, P β, P γ să fie concurente. Mediatoarea coardei de intersecţie P α este linia centrelor a O_a. Dar dreptele A A_1, B B_1, C C_1 sunt concurente într'un punct Q, centrul de omologie al triunghiurilor A B C, A_1 B_1 C_1, P fiind un punct al cubicei lui *Darboux* a triunghiului A B C. Rezultă că a O_a unind mijloacele segmentelor P A, P A_1 trece prin mijlocul ω al lui P Q, pe unde trec şi dreptele analoage b O_b, c O_c. Deci, punctele α, β, γ sunt pe cercul de diametru P Q. Când P este ortocentrul H, atunci Q este centrul de greutate (baricentru) G.

N. A.

Au dat soluţie d-nii: *Mehedinţi Dumitru, Mihăileanu N. N, Postelnicescu C. M., Predoescu M. Traian, Stănescu Emil, Ţiţeica I. Ilie.*

Problema 1859. — *Cu cifrele* 1, 2, 2, 5, 8 *să se formeze un patrat perfect de cinci cifre.*

ŞTEFAN C. TILICA

Soluţie. Ţinând seamă de terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect şi de cifrele din enunţ, deducem că patratele cerute se pot termina numai cu

(1) 21, 25, şi 81.

De altă parte, folosind tabele cu terminaţiile de trei cifre ale unui patrat perfect din „*Gazeta Matematică*“ anul XXXV, No. 4. şi având în vedere terminaţiile (1) şi cifrele din enunţ deducem că patratele căutate nu se pot termina de cât cu

521, 225 şi 281.

Observând încă cifrele rămase în enunţ, nefolosite, conchidem că patratele de cinci cifre căutate se găsesc printre numerile

28521, 82521, 18225. 81225, 25281, 52281.

Dintre aceste numere, patrate perfecte sunt numai

$18225 = 135^2$, $81225 = 285^2$, $25281 = 159^2$

şi ele ne dau soluţiile cerute.

Au găsit cele trei soluţii, d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Boerescu G. P* (Locot., Constanţa), *Enăchescu Ion* (lic. Milit; Timişoara), *Ionescu F. Petre* (lic. Carol I, Craiova), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sublt., Roman) *Petrescu R Gheorghe* (lic. Giurgiu).

Au dat numai două soluţii, d-nii: *Facso I. Gheorghe* (lic Loga, Timişoara) şi *Gligor Ioan* (Şc. Of. Rez. Art., Craiova).

Au găsit o singură soluţie, d-ra *Papadopol-Demetra Elena* (Bacău) şi d-nii *Cristea N., Radoslav Gh. Ioan* (Polit., Bucureşti) şi *Ţarălungă Savel.*

Problema 1872[1]. — *Să se determine* x *şi* y *din primul cadran, care să satisfacă sistemul:*

$$\begin{cases} x + y = 135^0 \\ sp\, x + sp\, y = 1{,}43 \end{cases}$$

V. ALACI

Soluţie. Arcele x, y fiind în primul cadran, iar 135^0 in al 2-lea cadran, formula (21′) din „*Trig. patratică*“ p 19 ne dă

$$cp\,(x+y) = \frac{1 \quad sp\,x - sp\,y}{1 - 2\,cp\,x\,cp\,y} = cp\,135^0 = -\frac{1}{2},$$

din care, în baza ecuaţiei a 2-a a sistemului, deducem

$$-0{,}43 = -\frac{1}{2} + cp\,x\,cp\,y$$

deci,

(1) $$cp\,x\,cp\,y = 0{,}07.$$

---

[1]) Să se vază articolele *D. Năsturaş, Proprietăţi ale cercurilor duse prin două vârfuri şi ortocentrul unui triunghiu* (Gazeta Matematică, vol. VIII, p. 53—55, 221—224); *Tr. Lalescu, Proprietăţi ale cercului ortocentroidal* (G. M., vol. IX, p. 31—34); *Ion Crăciunescu, Proprietăţi ale triunghiului* (G. M., vol. X, p. 77—80); *A. Angelescu, Asupra unor puncte remarcabile de pe simedianele unui triunghiu* (G. M., vol. XIII, p. 10—15); *I. I. Săndulescu, Trei puncte remarcabile într'un triunghiu* (Rev. Mat. Tim., anul XIIi p. 124). Acestea au fost publicate ca urmare a problemei, 593, propusă de *T. Lalescu* şi rezolvată în G. M., vol. IX, p. 40

[1]) Enunţ rectificat.

De altă parte ecuația 2-a a sistemului, în virtutea formulei fundamentale pentru primul cadran ($sp\,\alpha + cp\,\alpha = 1$), devine

$$cp\,x + cp\,y = 0{,}57. \tag{2}$$

Din relațiile (1) și (2) deducem că $cp\,x$, $cp\,y$ sunt rădăcinile ecuației de gradul al 2-lea

$$100\,t^2 - 57\,t + 7 = 0,$$

care ne dă,

$$t = \frac{57 \pm \sqrt{449}}{200}$$

De aci avem:

$$\begin{cases} cp\,x = 0{,}39095 \\ cp\,y = 0{,}17905 \end{cases}, \quad \text{sau} \quad \begin{cases} cp\,x = 0{,}17905 \\ cp\,y = 0{,}39095 \end{cases}$$

Căutând în tabela care dă valorile naturale ale *cosinusului patratic* din *„Trig. patratică“* p 15, găsim soluțiile

$$\begin{cases} x = 57^0, 20', 2'' \\ y = 77, 39', 58'' \end{cases}, \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = 77^0, 39', 58'' \\ y = 57^0, 20', 2'' \end{cases}.$$

Au căutat să rezolve problema, d-nii: *Bakonyi C.* (Politechnica, Timișoara), *Dobrescu V. Eugen* (Lic. Piatra-Neamț) și *Cetățeanu Stelian* (Politechnica, București),

Primul a folosit direct ecuația (36) din *„Trig. patratică“*, p. 142, dar unde coeficientul lui t este $2(2-\beta)\,cp\,\alpha$, nu $2\beta\,cp\,\alpha$; ceilalți au folosit greșit ecuația (33) din *„Trig. patratică“*, p. 141, fiindcă ea nu se aplică în cazul nostru întru cât, $\frac{\pi}{2} \leq x + y \leq \pi$.

Problema 1887. — *Să se rezolve ecuația:*

$$(\sin x + \operatorname{cosec} x)^2 + (\cos x + \sec x)^2 + (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = 25.$$

CPT. C V COSTACHESCU

Soluție. Efectuând patratele și având în vedere că

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin x \operatorname{cosec} x = 1,$$

$$\cos x \sec x = 1, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1,$$

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x,$$

obținem

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 8,$$

sau

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = 10.$$

Această ecuație se mai poate scri

$$\frac{1}{(\sin x \cos x)^2} = 10,$$

sau

$$\sin 2x = \pm\sqrt{0,4}.$$

De aci deducem

$$\lg \sin 2x = \frac{\lg 0{,}4}{2} = \bar{1},80103, \quad \lg \sin (\pi + 2x) = \bar{1},80103,$$

ceia ce ne dă soluțiile generale

$$\begin{cases} x_1 = k\pi \pm 19^0, 37' \\ y_2 = k\pi \pm 70^0, 23' \end{cases}.$$

Au dat soluții, d-nii: *Boerescu P. G.* (Locot. Constanța), *Dobrescu V. Eugen* (lic. Piatra-Neamț), *Florescu C. Ghenade* (lic. Român, Sofia), *Goga Florian* (student Timișoara), *Lupescu Corneliu* (Sublt., Roman), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Radoslav Gh. Ion* (Polit., București), *Simon Ș. Petru* (lic. Arad), *Ștefanovici I. Mircea* (lic. *Spiru Haret*, București) și *Vasiliu D-tru* (liceul Milit., Timișoara).

Problema 1895. — *Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:*

$$E = \frac{(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A - \cos B)^2}{(\sin A + \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2}.$$

CPT. C. V. COSTACHESCU

Soluție. Efectuând ridicările la patrat și ținând seamă de relațiile cunoscute,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha \mp \beta),$$

expresia dată se poate scrie

$$E = \frac{2 - 2\cos(A-B)}{2 + 2\cos(A+B)} = \frac{\sin^2\frac{A-B}{2}}{\cos^2\frac{A-B}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{A-B}{2}$$

și ultimul membru este calculabil prin logaritmi.

Soluții date de d-nii: *Aldea V. Minea* (Buzău), *Bakonyi C* (Polit., Timișoara), *Boleanțu Lazăr* (Polit., Timișoara), *Deheleanu I. Gheorghe* (Polit., Timișoara) *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Gloden A.* (Luxemburg), *Ionescu F. Petre* (Colegiul Craiova), *Iosipescu Cicerone* (lic. Piatra-Neamț), *Luca I. Ioan* (Polit., Timișoara), *Lupescu Corneliu* (Slt.' Roman), *Manolache C. Mircea* (lic Internat, Iași), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu I Adrian* (Polit., Timișoara), *Schapira Solo* (Piatra-Neamț), *Săruleșteanu I. Emanuel* (Bucuresti), *Simon Ș. Petru* (lic. Arad), *Ștefanovici I. Mircea* (lic. Spiru Haret, București), *Tica P. Marin, Vasiliu Gh. D-tru* (lic. Milit., Timișoara) și *Voronca Horia* București).

Problema 1896. — *Să se stabilească relaţia:*

$$\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

LT. MIRCEA GRUMAZESCU

Soluţie. In baza relaţiilor cunoscute

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.\quad b^2=c^2+a^2-2ac\cos B,$

primul membru al relaţiei date se poate scri:

$$(1)\qquad \sum \frac{b^2+c^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}\operatorname{tg} A =$$

$$\sum \frac{2bc\cos A}{2ac\cos B}\cdot\frac{\sin A}{\cos A} = \sum \frac{b\sin A}{a\cos B} = \sum \operatorname{tg} B,$$

fiind că,

$$b\sin A = a\sin B.$$

Cum de altă parte,

$$\Sigma \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

(*„Compléments de Trigonométrie“* par „F. G. M.“, p. 68), relaţia (1) devine

$$\sum \frac{b^2+c^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Aldea V. Minea* (Buzău), *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Boleanţu Lazăr* (Polit., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Gloden A.* (Luxemburg), *Ionescu F. Petre* (Colegiul, Craiova), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sblt., Roman), *Mircea A. Negrea* (Brăila), *Popescu Adrian* (Sult), *Schapira Solo* (P.-Neamţ), *Simon Ş. Petru* (lic. Arad), *Ştefanovici I. Mircea* (liceul Spiru Haret, Bucureşti), *Tica P. Marin*, *Vasiliu Gh. D-tru* (lic. Milit. Timişoara), şi *Voronca Horia* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2026. — Să se găsească un cub perfect de nouă cifre întrebuinţând numai cifrele perechi între cari odată şi pe zero.

G-L GH. BUICLIU

2027. — Să se descompună numărul 30^4 într'o sumă de patru patrate perfecte în câte moduri se poate face această descompunere? Generalizare.

M. GHERMANESCU

2028. — Să se găsească rădăcinele reale ale ecuaţiei

$x^3+(i-10)x^2+(31-5i)x+6i-30=0,\quad (i=\sqrt{-1})$

MIHAIL ST. BOTEZ

2029. — Să se găsească extremele funcţiei

$$x^3-3x^2y+6x^2-y+3=0.$$

IULIAN M. MORARIU

2030. — Dacă

$$y=\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+2x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+2x^2}},$$

avem

$$\frac{1+2x^2}{1+x^2}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)y'+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)y\right]+2y=\frac{x}{1+x^2}.$$

IOAN N. GLIGOR

2031. — Printr'un punct A al unui cerc se duc coardele AB, AC şi AD, astfel ca AD să bisecteze unghiul BAC.

Să se demonstreze inegalitatea

$$\overline{AD} > \frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{2}.$$

P. B. BOLDESCU

2032. — Fie ABCD un patrulater înscris în cercul O; O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor OAB, OBC, OCD şi OAD; A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele razelor OA, OB, OC şi OD.

Să se arate că dreptele A_1C_1, B_1D_1, O_1O_3 şi O_2O_4 sunt concurente.

TEODOR GH. COCEA

2033. — Într'un triunghiu dreptunghic ABC, se unesc mijloacele M, N ale laturilor BC şi AB; se duce apoi bisectoarea AP (P pe MN) a unghiului BAM şi se uneşte B cu P prelungindu-se până taie în Q latura AC.

Notaţiile fiind cele obicinuite, să se stabilească relaţia

$$a^2 . b . \overline{AP}^2 = c^2 . \overline{PM}(a . c + b . \overline{QC}).$$

V. ALACI

ERATĂ. În problema propusă 2020 din n-rul trecut, membrul al 2-lea este P(x) nu (x).

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacția „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timișoara.

2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, București V.

3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareș No. 41, Piatra-Neamț,

4. *Dr. Mihail Șt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XX, cu prețul de lei 200 volumul și se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebue să fie, scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Legându-se colecțiile R. M. T., anii I—XX, în volume și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

ANUL XXII. MAIU 1942 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE" (URMARE).

2. NOTE MATEMATICE: 6, 7, 8.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 414, 1300, 1891.

5. PROBLEME PROPUSE: 2034 — 2041.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Din cauza scumpirei hârtiei şi a tiparului am fost obligaţi a mări costul abonamentului pentru anul 1942 la 180 (una sută optzeci) lei.

„R. M. T." aduce vii mulţumiri D-lui Profesor *Mircea A. Negrea*, (Brăila) un harnic şi distins colaborator, pentru cele 23 abonamente făcute pentru elevii săi.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — No. 3 TIMISOARA, MAIU 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE"

DE

V. ALACI.

(urmare)

Strofoida rombică oblică.

30. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație rombică*

$$(77)\quad r = a\cos 2(\theta+\alpha),\quad (a>0,\quad 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{4}),$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi = 90^0$.

Prima soluție. Schimbând θ în $\pi+\theta$, r rămâne același, de unde rezultă simetria configurației (77) față de origină, într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$.

Vom construi dar configurația (77), întâi, în primul și al 4-lea cadran și apoi vom întregi părțile aflate cu simetricele lor față de origina O.

Observăm încă în prealabil că, pentru a avea configurația (77) în primul și al 4-lea cadran, este suficient a face să varieze θ numai în intervalul închis $(-\frac{\pi}{4}-\alpha, \frac{\pi}{4}-\alpha)$.

Acum efectuăm următoarea construcție prin puncte:

Din origina O, *a unui sistem de axe rectangulare* $x'x$, $y'y$, *descrim un cerc de rază a și fie* A, A′, B, B′ *punctele unde el taie axele.*

Luăm apoi pe cerc, de o parte și alta a lui A, *arcele* $\overset{\frown}{AV}$, $\overset{\frown}{AV'}$ *astfel ca*

$$\overset{\frown}{AV} = \frac{\pi}{4}-\alpha, \qquad \overset{\frown}{AV'} = -\frac{\pi}{4}-\alpha,$$

ducem o rază variabilă $O\beta$ *cuprinsă între razele* OV′, OV *și notăm*

$$\sphericalangle AO\beta = \theta,$$

θ *măsurându-se în senz pozitiv de la* OA *la* $O\beta$.

Mai departe, măsurăm din A *tot în senz pozitiv*

$$\overset{\frown}{AM}^{1)} = 2(\theta+\alpha).$$

Intersecția P *a lui* $O\beta$ *cu perpendiculara* MM_1 *pe axa* $x'x$, *aparține configurației cerute,* (fig. 22).

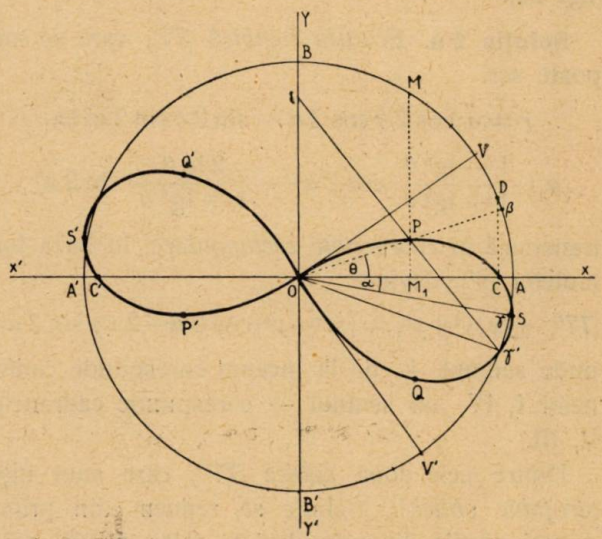


Fig. 22.

Justificăm această afirmare arătând că, *coordonatele rombice* ale lui P care din figură sunt

$$r = OM_1, \qquad \theta = \sphericalangle xOP, \qquad 90^0 = \varphi$$

satisfac ecuația (77).

În adevăr, din triunghiul dreptunghic OM_1M, avem

$$OM_1 = OM\cos\overset{\frown}{AOM},$$

sau

---

[1]) Pentru a construi cu ușurință $\overset{\frown}{AM} = 2(\theta+\alpha)$, luăm arcul $A\gamma = \alpha$ (în spre V′) și atunci $\overset{\frown}{AM} = 2\overset{\frown}{\gamma\beta}$

$$r = a\cos 2(\theta + \alpha),$$

tocmai ecuația (77). Punctul P a fost astfel bine definit.

Variind θ în intervalul de existență menționat, obținem analog lui P alte puncte și observând figura și tabloul de variație

θ	0	$\frac{\pi}{4} - \alpha$		$\frac{7\pi}{4} - \alpha$	$2\pi - \alpha$	2π
r	OC	0		0	OA	OC

deducem că, în primul și al 4-lea cadran, configurația (77) este formată din bucla C P O Q S C. Întregind această buclă cu simetrica ei C′ P′ O Q′ S′ C′ față de origina O, obținem întreaga configurație (77).

Am putea afla cu ajutorul formulei (20) și tangentele în diferitele ei puncte.

Prin urmare: *Configurația* (77) *este formată astfel din buclele* C P O Q S C, C′ P′ O Q′ S′ C′, (fig. 22).

Soluția 2-a. *Ecuația rombică* (77), care se mai poate scri

$$r = a(\cos 2\theta \cos 2\alpha - \sin 2\theta \sin 2\alpha) =$$

$$a\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\cos 2\alpha - \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\sin 2\alpha\right),$$

transpusă în *coordonate rectangulare*, în baza formulelor (9′), devine

$$(77') \quad \pm x(x^2 + y^2) = [(x^2 - y^2)\cos 2\alpha - 2xy\sin 2\alpha)],$$

unde semnul + de la început corespunde cadranelor I, IV, iar semnul — corespunde cadranelor II, III.

Dintre cele două *cubice* (77′), care sunt niște *strofoide oblice*[1]), trebuie să reținem din prima, numai părțile din primul și al 4-lea cadran, adică bucla C P O Q S C, iar din cea de a 2-a numai părțile din cadranele al 2-lea și al 3-lea, adică bucla C′ O P′ Q′ S′ C′.

Obținem astfel aceiași configurație ca în prima soluție.

Observare. Configurația (77), care este o curbă nouă, fiind formată din două bucle de *strofoide oblice*, simetrice, față de origina O și având o *ecuație rombică*, (77), am numit'o **strofoida rombică oblică.**

[1]) Dr. *Gomes Texeira*. Obras sobre Mathematica, Vol. I, p. 31.

Observare importantă. Dacă ne referim la construcția din prima soluție și indepărtăm restricția impusă de natura *ecuației rombice* (77), putem enunța următoarea problemă de *geometrie analitică:*

Problemă. *Pe un cerc dat de centru* O, *luăm arcul constant*

$$\overset{\frown}{\gamma A} = \alpha$$

și din A *luăm în continuare în senz pozitiv arcul variabil*

$$\overset{\frown}{A\beta} = \theta.$$

Tot în senz pozitiv măsurăm încă

$$\overset{\frown}{AM} = 2\overset{\frown}{\gamma\beta} = 2(\theta + \alpha).$$

Se cere locul geometric al punctului P, *intersecția lui* O β *cu perpendiculara* M M_1 *pe* O A, (fig. 22).

Soluție analitică. Alegem O A și perpendiculara pe ea O B ca axe $x'x$, $y'y$ și fie a raza cercului dat.

Din triunghiul dreptunghic O M_1 M, avem

$$OM_1 = OM\cos\widehat{AOM} = a\cos 2(\theta + \alpha) =$$

$$a(\cos 2\theta \cos 2\alpha - \sin 2\theta \sin 2\alpha),$$

sau

$$OM_1 = a\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\cos 2\alpha - \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\sin 2\alpha\right).$$

De altă parte, coordonatele (x, y) ale lui P trebuie să satisfacă ecuațiile dreptelor O β, M_1 M care sunt

$$\begin{cases} y = x\operatorname{tg}\theta \\ x = a\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\cos 2\alpha - \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\sin 2\alpha\right). \end{cases}$$

Eliminând θ între aceste ecuații, obținem

$$(78) \quad x(x^2 + y^2) = a[(x^2 - y^2)\cos 2\alpha - 2xy\sin 2\alpha].$$

Locul lui P *este astfel cubica* (78).

Observare. Important este faptul că, *cubica* (78), care este o *strofoidă oblică*[1]), se poate construi uşor prin puncte, numai cu rigla şi compasul, folosind metoda de construcţie de la n-rul 28. În adevăr, transpunând *ecuaţia carteziană* (78) în *coordonate rombice,* având în vedere formulele (9′), ea devine

$$r = a\cos 2(\theta + \alpha) \tag{78'}$$

pentru cadranele I şi IV şi

$$r = -a\cos 2(\theta + \alpha) \tag{78''}$$

pentru cadranele II şi III.

Dar, în prima soluţie a problemei de la n-rul 30, am arătat cum se construeşte prin puncte curba de *ecuaţie rombică* (78′) şi analog se poate construi curba de *ecuaţie rombică* (78″).

Nu mai inzistăm asupra acestei construcţii din urmă, de şi este interesantă.

Relevăm doar faptul că, părţile din cadranele I IV a ecuaţiei (78′), întregite cu părţile din cadranele II şi III a ecuaţiei (78″) ne dau împreună *cubica* (78).

O proprietate geometrică. *Dacă ne referim la figura 22 şi luăm pe cercul* O *punctul* γ' *astfel ca*

$$\overset{\frown}{\gamma'\gamma} = \alpha \qquad (\gamma' \text{ între B' şi } \gamma),$$

atunci, unind γ' *cu un punct oarecare* P *al strofoidei oblice* (78) *şi notând cu* I *intersecţia dreptelor* γ' P, O B, *avem*

$$OI = IP. \tag{79}$$

În adevăr, M P fiind paralelă cu O B, avem

$$\sphericalangle IOP = \sphericalangle MP\beta, \tag{80}$$

iar de altă parte fiindcă

$$\overset{\frown}{\gamma'\beta} = 2\alpha + \theta = \overset{\frown}{\beta M},$$

înseamnă că O β este bisectoarea unghiului γ' O M şi deci

$$\sphericalangle MP\beta = \sphericalangle \beta P\gamma' = \sphericalangle IPO. \tag{81}$$

Din (80) şi (81) rezultă

$$\sphericalangle IOP = \sphericalangle IPO$$

şi astfel relaţia (79) este justificată.

[1]) Dr. *Gomes Texeira:* loc. cit.

Observare. Putem privi construcţia dată în prima soluţie a problemei de la n-rul (30) ca *definiţie* pentru *strofoida oblică,* analoagă aceleia ce am dat *strofoidei drepte,* ($\alpha = 0$).

Determinarea punctelor de inflexiune în coordonate rombice.

31. **Problemă.** *Se dă în coordonate rombice curba*

$$r = f(\theta), \tag{82}$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi = 90^0$ *şi se cer punctele ei de inflexiune.*

Soluţie. Vom determina *coordonatele rombice* (r, θ)[1]) ale acestor puncte.

Pentru aceasta vom folosi rezultatul cunoscut că,

$$\begin{cases} x = \varphi(\theta) \\ y = \psi(\theta) \end{cases}$$

fiind ecuaţiile parametricele ale unei curbe, punctele sale de inflexiune sunt date de ecuaţia

$$\frac{dx}{d\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2} - \frac{dy}{d\theta}\frac{d^2x}{d\theta^2} = 0 \tag{83}$$

şi de ecuaţia (82), considerate simultan.

Cum între *coordonatele carteziene* (x, y) ale unui punct şi *coordonatele sale rombice* (r, θ) există relaţiile (9′), anume

$$\begin{cases} x = \pm r \\ y = \pm r\operatorname{tg}\theta, \end{cases}$$

unde semnul + corespunde cadranelor I, IV, iar semnul — cadranelor II, III, înseamnă că x, y se exprimă parametric în funcţie de θ, r fiind dat de (82) şi atunci ecuaţia (83) devine

$$r'\left(r''\operatorname{tg}\theta + \frac{2r'}{\cos^2\theta} + \frac{2r\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}\right) -$$

$$r''\left(r'\operatorname{tg}\theta + \frac{r}{\cos^2\theta}\right) = 0,$$

unde r', r'' sunt derivatele întâia şi a 2-a ale lui r în raport cu θ.

Simplificând această relaţie găsim că, *coordonatele rombice* (r, θ) ale punctelor de inflexiune (când ele există), sunt date de sistemul:

$$\begin{cases} r = f(\theta) \\ r(r'' - 2r'\operatorname{tg}\theta) = 2r'^2. \end{cases} \tag{84}$$

[1]) Când unghiul auxiliar este $\varphi = 90^0$, considerăm *coordonate rombice* ale unui punct P, numai (r, θ), adică *modulul rombic* şi *unghiul polar.*

Cisoida dublă.

32. **Problemă.** *Se cere configuraţia de ecuaţie rombică*

(85) $$r = 2a\sin^2\theta, \qquad a > 0$$

unghiul auxiliar fiind $\varphi = 90^0$.

Prima soluţie. Configuraţia (85) este simetrică faţă de axe şi origina lor, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$ sau $\pi \mp \theta$, r rămâne acelaşi.

Vom construi dar configuraţia (85) numai pentru $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ şi o vom întregi cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor.

Efectuăm în acest scop următoarele construcţii prin puncte, fiecare procurându-ne ramura configuraţiei (85) din primul cadran.

Construcţia 1-a. *Descrim un cerc* C *de rază a, ducem un diametru* O A, *iar din* O *şi* A *ducem secantele variabile* A M, O N *astfel ca*

$$\sphericalangle\, O\,A\,M = \sphericalangle\, A\,O\,N.$$

Punctul P, *intersecţia lui* O N *cu perpendiculara* M M_1 *pe* O A, *aparţine configuraţiei* (85), (fig. 23).

Justificăm această afirmare arătând că, *coordonatele rombice* ale lui P, care din figură sunt

$$r = O\,M_1, \qquad \theta = \sphericalangle\, x\,O\,P,$$

satisfac ecuaţia (85), (O A şi perpendiculara în O pe ea le considerăm ca axe $x'x$, $y'y$).

În adevăr, din triunghiurile dreptunghice O M A, O M_1 M, avem

$$O\,M = O\,A\sin\theta = 2a\sin\theta$$
$$O\,M_1 = O\,M\sin\theta$$

şi prin înmulţire obţinem

$$r = 2a\sin^2\theta,$$

tocmai ecuaţia (85). Punctul P a fost astfel bine definit.

Variind θ în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$ şi observând tabloul de variaţie.

θ	0	45^0	90^0
r	0	a	$2a$

obţinem alte puncte analoage lui P, care unite ne dau ramura infinită O P Q. *Această ramură, complectată cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor, ne dă în întregime configuraţia* (85).

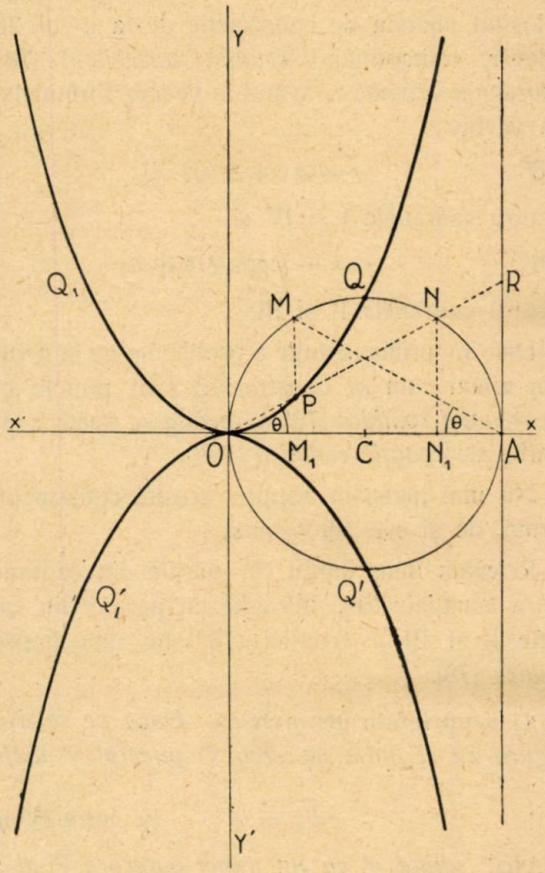


Fig. 23.

Observare. Prelungind O N până întâlneşte în R tangenta în A la cerc, constatăm că

(86) $$O\,P = N\,R,$$

fiindcă proecţiile O M_1, N_1 A ale lui O P, N R pe axa $x'x$ sunt egale, ele fiind în acelaşi timp proecţiile pe axa $x'x$ ale arcelor egale $\overset{\frown}{OM}$, $\overset{\frown}{AN}$.

Cum relaţia (86) cuprinde tocmai *definiţia clasică a cisoidei lui Dioclès*, urmează că ramurile O P Q, O P' Q' ne dau această *cisoidă;* dar şi ramurile O P_1 Q_1, O P'_1 Q'_1 din stânga axei $y'y$, care fac parte din configuraţia (85), constitue şi ele o *cisoidă.*

Configuraţia (85) *fiind formată astfel din două* **cisoide**, *am numit-o* **cisoidă dublă.**

Construcţia 2-a. Ecuaţia (85) se mai poate scri încă

$$r = a - a\cos 2\theta \tag{87}$$

şi pentru a o construi procedăm astfel:

Descrim un semicerc C *de rază* a, *având diametrul fix* O A *şi ducem o secantă variabilă* O B, B_1 *fiind piciorul perpendicularei din* B *pe* O A.

Luăm apoi pe O A *segmentul*

$$O P_1 = B_1 A$$

şi intersecţia P *a lui* O B *cu perpendiculara în* P_1 *pe* O A, *aparţine configuraţiei* (87), (fig. 24).

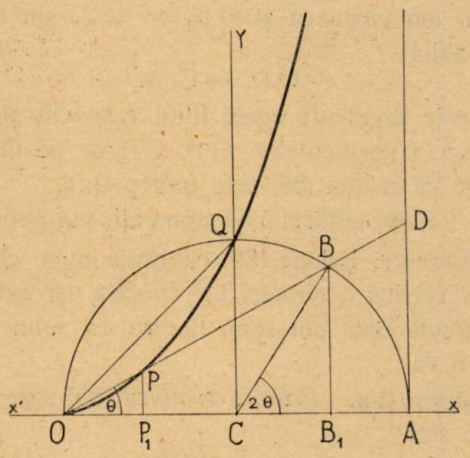


Fig. 24.

Este suficient a arăta că, *coordonatele rombice* ale lui P, care din figură sunt

$$r = O P_1, \qquad \theta = \sphericalangle A O P,$$

satisfac ecuaţia (87).

În adevăr, observăm cu uşurinţă că,

$$O P_1 = B_1 A = C A - C B_1 = a - a\cos 2\theta,$$

sau

$$r = a - a\cos 2\theta,$$

tocmai ecuaţia (87). Punctul P a fost astfel bine definit.

Variind secanta O B în primul cadran, obţinem alte puncte analoage lui P, care unite ne dau ramura infinită O P Q.

Această ramură complectată cu simetricile ei faţă de axe şi origina lor, ne dă în întregime configuraţia (85).

Observare. Prelungind secanta O B până întâlneşte în D tangenta în A la cerc, observăm că

$$O P = B D, \tag{88}$$

fiindcă proecţiile lor $O P_1$, $B_1 A$ sunt prin construcţie egale.

Dar relaţia (88) invederează că ramura O P Q este un arc de *cisoidă*, *prin urmare configuraţia* (85) *este o* **cisoidă dublă.**

Construcţia 3-a. *Construim întâi strofoida* $r_1 = a\cos 2\theta$ *ca în figura 21 din problema de la n-rul 29 şi în* A ($O A = a$) *pe* O A *ridicăm perpendiculara* Δ.

Apoi ducem din O, *în primul cadran, o semidreaptă ce taie în* B *strofoida şi în* C *dreapta* Δ *şi luăm pe* O A *segmentul*

$$O P_1 = B_1 A,$$

$B_1 A$ *fiind proecţia lui* B C *pe* O A.

Intersecţia P *a lui* O C *cu perpendiculara în* P_1 *pe* O A *aparţine configuraţiei* (85), (figura trebuie făcută).

În adevăr, *coordonatele rombice* ale lui P fiind

$$r = O P_1, \qquad \theta = \sphericalangle A O P,$$

ele satisfac ecuaţia (85), fiindcă pe figură, avem

$$O P_1 = O A - P_1 A = O A - O B_1 = a - a\cos 2\theta,$$

sau

$$r = 2a\sin^2\theta.$$

Punctul P a fost astfel bine definit.

Variind secanta O B în primul cadran, obţinem analog lui P alte puncte, care unite ne dau ramura infinită de *cisoidă*, O P Q.

Această ramură, complectată cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor, ne dau **cisoida dublă** (85), ca în fig. 23.

Construcţia 4-a. Fiindcă ecuaţia (85) se mai poate scri

$$2ar = 4a^2\sin^2\theta,$$

efectuăm următoarea construcţie prin puncte:

Din origina O, *a unui sistem de axe rectangulare* $x'x$, $y'y$, *descrim un cerc de rază* $2a$, *care taie axele în* A, A′, B, B′.

Unim apoi A′ *cu un punct oarecare* M *de pe* O B, *ducem din* M *perpendiculara* $M P_1$ *pe* A′ M *şi tot din* M *ducem o paralelă la* O A *care taie cercul în* N, (N *în primul cadran*).

Intersecția P *a razei* O N *cu perpendiculara în* P_1 *pe* O A, *aparține configurației* (85), (fig. 25).

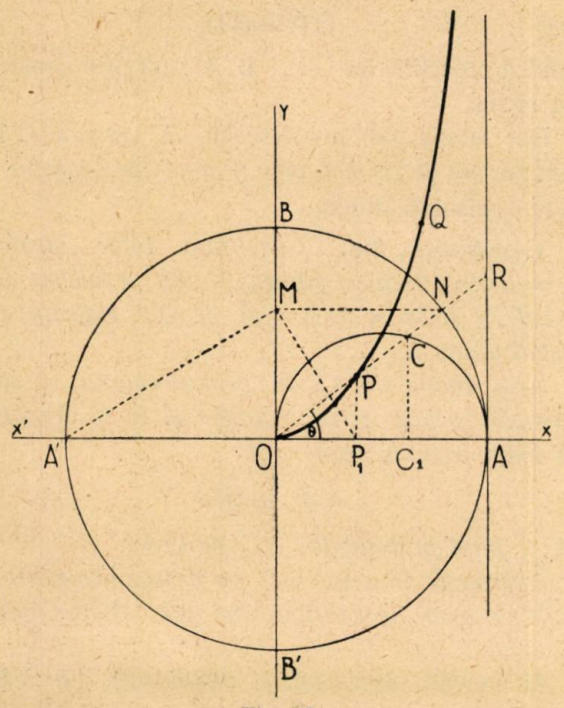


Fig. 25.

Pentru a justifica această afirmare, vom demonstra că, *coordonatele rombice* ale punctului P, care pe figură sunt

$$r = OP_1, \qquad \theta = \sphericalangle AOP$$

satisfac ecuația (85).

În adevăr, din triunghiurile dreptunghice $A'MP_1$, O M N avem respectiv

$$\overline{OM}^2 = A'O \times OP_1 = 2ar$$

$$OM = ON \sin\theta = 2a \sin\theta.$$

De aci deducem

$$4a^2 \sin^2\theta = 2ar,$$

sau

$$r = 2a \sin^2\theta,$$

tocmai ecuația (85). Punctul P a fost astfel bine definit.

Făcând să varieze punctul M pe raza O B, obținem analog lui P alte puncte, care unite ne dau ramura infinită de *cisoidă*, O P Q.

Această ramură, întregită cu simetricele ei față de axe și origina lor, ne dă **cisoida dublă** (85), ca în fig. 23.

O proprietate geometrică. *Dacă în fig.* 25 *prelungim raza* O N *până întâlnește în* R *perpendiculara în* A *pe* O A *și dacă aceiași rază* O N *întâlnește în* C *semi-cercul de diametru* O A, *atunci*

(89) $$OP = CR.$$

În adevăr, ducând perpendiculara CC_1 pe O A, din triunghiurile dreptunghice AC_1C și OCA avem respectiv

$$C_1A = AC \sin\theta$$

$$AC = OA \sin\theta = 2a \sin\theta$$

și prin înmulțire obținem

$$C_1A = 2a \sin^2\theta.$$

Dar am văzut că și $OP_1 = r = 2a \sin^2\theta$, astfel că rezultă

$$OP_1 = C_1A.$$

Aceste segmente egale fiind respectiv proecțiile pe O A a segmentelor O P, C R de pe O R, urmează că relația (89) este îndreptățită.

Ar fi interesantă și o demonstrație pur geometrică.

Observare. Relația (89) cuprinde în ea, chiar definiția clasică a *cisoidei lui Dioclès*, iar cele patru construcții date pot servi fiecare, ca noui definiții pentru ea.

Soluția 2-a. *Ecuația rombică* (85) care se mai poate scri

$$r = \frac{2a \operatorname{tg}^2\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta},$$

transpusă în *coordonate rectangulare*, în baza formulelor (9'), devine

(85') $$\pm x = \frac{2ay^2}{x^2 + y^2},$$

care ne dă

(87) $$x(x^2 + y^2) = 2ay^2$$

pentru cadranele I, IV și

(88) $$-x(x^2 + y^2) = 2ay^2$$

pentru cadranele II, III.

De altfel cadranele menționate sunt tocmai domeniile de existență ale cubicelor (87) și (88).

Prin urmare: *Ecuația rombică* (85) *reprezintă o configurație formată din părți ale cubicelor* (87) *și* (88), — *cunoscute sub numele de cisoide ale lui Dioclès* —, *din cubica* (87) *luând partea din cadranele* I, IV, *iar din cubica* (88) *luând partea din cadranele* II, III.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

6. — *Asupra problemei 1859.*

Problema se poate rezolva fără ajutorul tablelor de terminaţii ale patratelor, cum s-a făcut la pag. 28 din numărul trecut.

În adevăr, se observă că cifrele 1, 2, 2, 5, 8 nu pot da de cât patrate N^2 terminate în 2 sau 5. Deci

(1) $12825 < N^2 < 85221 \quad \therefore \quad 113 < N < 292.$

Observ că $1+2+2+5+8 = 9\,m$, deci N este multiplu de 3. Luând multiplii de 3 terminaţi cu 1, 5 sau 9 între limitele (1), se găsesc numerele 129, 135, 141, 159, 165, 171, 181, 189, 195, 201, 225, 231, 249, 261, 279, 285, 291, pe care ridicându-le la patrat, găsim cele 3 soluţii din numărul precedent.

G-L G. BUICLIU

7. — *Propriétés de quelques puissances de 45.*

$45^6 = 8.303.765.625 = (8+3+3+7+6+5+6+2+5)^6$

$$\begin{cases} 45^7 = 373.669.453.125; \\ \quad 3+7+3+6+6+9+4+5+3+1+2+5=54; \\ 45^8 = 16.815.125.390.625; \\ 1+6+8+1+5+1+2+5+3+9+6+2+5=54. \end{cases}$$

La somme des chiffres de la 6e puissance du nombre est la racine; la somme des chiffres de la 7e et de la 8e puissances est le nombre renversé.

Carrés de la forme $\overline{aabaab}$ *et* $\overline{cddcdd}$.

On a, dans le système de base 23,

$$778778_{23} = 6864^2_{10} = 47.114.496_{10}$$

$$\begin{cases} 882882_{23} = 7332^2_{10} = 53.758\,224_{10} \\ 288288_{23} = 3900^2_{10} = 15.210.000_{10}. \end{cases}$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

8. — *Magische Quadrate aus Primzahlen.*

(1) Magisches Quadrat **1942.**

A 303	B 603	C 683	D 353
E 593	F 443	G 393	H 513
J 413	K 563	L 543	M 423
N 633	P 333	Q 323	R 653

Bei nebenstehendem Quadrat ergibt sich (1) in jeder waagrechten Reihe, (2) in jeder senkrechten Reihe, (3) in jeder Diagonale immer als Summe die Jahreszahl 1942. Die Jahreszahl ergibt sich ferner als Summe (4) in den vier äusseren Feldern (A — D — N — R), (5) in den vier inneren Feldern (F—G—K—L), (6) in den Feldern E—I—H—M, (7) in den Feldern B—C—P—Q. Alle Zahlen haben die Endziffer 3. Subtrahiert man von jeder Zahl 286, dann ergibt sich ein magisches Quadrat, das die gleichen Eigenschaften mit der Konstante 798 ergibt, das aber *nur aus Primzahlen* mit der Endziffer 7 besteht.

(2) Ersetzt man bei dem magischen Quadrat unter (1) die eingesetzten Zahlen durch folgende Zahlen (immer von links rechts gelesen):

I. waagrechte Reihe: 19, 149, 389, 499; II. waagrechte Reihe: 409, 479, 29, 139; III. waagrechte Reihe: 449, 349, 199, 59; IV. waagrechte Reihe: 179, 79, 439, 359; so hat man ein magisches Quadrat, dessen magische Eigenschaften gleich sind den magischen Eigenschaften des Quadrates unter (1) es hat die Konstante 1056 und besteht *nur aus Primzahlen* mit Endziffer 9.

(3) Es lassen sich ähnliche Quadrate bilden nur aus Primzahlen mit Endziffer 3 und magische Quadrate nur aus Primzahlen mit Endziffer 1

(4) Ein magisches Quadrat, nur aus Primzahlen bestehend, mit der magischen Summe 102 ist dieses:

3 A	71 B	5 C	23 D
53 E	11 F	37 G	1 H
17 J	13 K	41 L	31 M
29 N	7 P	19 Q	47 R

Dieses Quadrat hat die gleichen magischen Eigenschaften wie das magische Quadrat unter (1).

(5) Ein 3^2-felderiges, nur aus *Primzahlen* bestehendes magisches Quadrat ist dieses:

A 43	B 1	C 67
D 61	E 37	F 13
G 7	H 73	J 31

Es ergibt sich die Zahl 111 als Summe (1) in jeder waagrechten Reihe, (2) in jeder senkrechten Reihe, (3) in jeder Diagonale. Ferner gilt hier für *beliebiges* x die Beziehung zwischen A — B — C und G — H — J:

$$(43+x)^2+(1+x)^2+(67+x)^2=$$
$$(7+x)^2+(73+x)^2+(31+x)^2.$$

Endlich gilt für *beliebiges* x zwischen A—D—G und C—F—J die Relation

$$(43+x)^2+(61+x)^2+(7+x)^2=$$
$$(67+x)^2+(13+x)^2+(31+x)^2.$$

(6) Ersetzt man beidem magischen Quadrat unter (5) die Zahlen durch folgende Zahlen (immer von links nach rechts gelesen): I waagrechte Reihe 577, 7, 337; II. waagrechte Reihe 67, 307, 547; III. 277, 607, 37; so bekommt ein *nur* aus Primzahlen mit der Endziffer 7 bestehendes Quadrat, das die *gleichen* magischen Eigenschaften besitzt wie das Quadrat unter (5). Ein Quadrat mit den *gleichen* magischen Eigenschaften, wie sie das Quadrat unter (5) besitzt, *nur* aus Primzahlen mit der Endziffer 9 bestehend, bekommt man, wenn man A = 569, B=59, C=449, D=239, E=359, F = 479, G = 269, H = 659, J = 149 setzt.

Auch aus Primzahlen mit der Endziffer 1 und aus Primzahlen mit nur Endziffer 3 lassen sich Quadrate bilden, welche die *gleichen* magischen Eigenschaften wie das Quadrat unter (5) besitzen.

ALFRED MOESSNER
(ANSBACH)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLVII, No. 8, Aprilie 1942. Asupra mişcării tautocrone plane (urmare şi sfârşit), de *Radu Bădescu*. Asupra teoremei lui *Fermat*, de *Iulian Petrescu*. Asupra limitei unor triunghiuri, de *I. C. Vasiliu*. Premiul „Ing. *Alexandru Roşu*, de *Alexandru Al. Roşu, D. Stoica, Gabriela Ţiţeica*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Buletinul Politechnicei din Bucureşti*, anul XII, 1941, Nrile 3 şi 4. Sur un théorème de M. *Pompeiu*, par *Serban Gheorghiu*. La constante arbitraire dans les opérations d'intégration, par *D Pompeiu*. Strömungsbilder für einzelne oder mehrere brunnen, von *D. Pavel*. La concentration anodique de l'acide nitrique, par *I. A. Atanasiu*. Sur le dosage du cuivre, par *Constantin Belcot* Beitrag zur Kenntnis der Krystallform einiger normalen Paraffin-Kohlenwasserstoffe mit grossem Molekulargewicht, isoliert aus Erdölwachs, von *Ion Irimescu*. Sur les propriétés d'isolation calorique des dechéts de mica en rapport avec les matériaux usuels, par *Serban Solacolu*. Über die Beziehungen zwischen *Mörtel* und *Betonfestigkeit*, von Dr. *A. Steope*. Le problème de la balistique extérieure, par *I. Linteş*. Le calcul des longerons d'aille d'avion confectionnés en bois de sapin (épicea), par *Gr Zamfirescu*. Die Verwendung tierischer und maschineller Zugkraft in der Landwirtschaft, von Dr. *G. Drăgan*. Contributions à l'étude des propriétés physiques du sol comme terrain arable et comme terrain de construction, par Dr. Ing Chim. *Gh. Pavlovschi* et Dr. R. *Mavrodineanu*. The effect of plowing on the yield of corn, oats, peas and wheat, cultivated on brown forest soil, by Dr. *Irimie D. Staicu*. Eine neue Methode für die Bestimmung der Drehungszahl eines Textilfadens von *G. Casanovici, D. Teodorescu, I. Ionescu-Muscel*. L'art roumaine ancien en Bessarabie, par *Toma T. Socolescou*.

3. *Ion Ionescu*. Maxime şi minime geometrice.
Este ocarte scrisă cu toată competenţa şi toată dragostea pentru generaţiile tinere de către întemeetorul *„Gazetei Matematice din Bucureşti*.
Ea cuprinde 126 probleme şi 40 teoreme relative la maxim şi minim, cuprinde apoi diferite metode între cari acelea ale lui *Fermat* şi *Grillet* şi mai conţine minunate date istorice adunate de autor încă de pe băncile liceului. Una din problemele curioase şi plină de farmec este *problema 96*: *Construcţia celulelor albinelor*, în istoricul căreia între altele găsim: *„Darwin* a spus că problema celulelor albinelor este *cel mai miraculos dintre toate instinctele cunoscute* Chestiunea a mai preocupat şi pe alţi oameni de ştiinţă. Astfel în 1911 *Heinricht Vogt* a făcut peste 4000 de măsurători de celule de albine şi a publicat o carte specială: *Geometrie und Oeconomie der Bienenzelle*. El a arătat că celula lui *Maraldi* este un tip mediu, că puţine albine pot fi socotite Doctori în matematici, căci nu toate fac celule după formele tipice". In încheierea acestei probleme găsim încă: *„Albinele fac fundurile celulelor în modul cel mai avantajos, pentru ca ele să aibă cea mai mică suprafaţă posibilă; în fine, într'un mod pe care geometria modernă singură l-a putut determina. Cine a dat acestor insecte atât de dispreţuite — nu în ochii filosofului, care nu dispreţueşte cele mai mici lucruri ale Divinităţii — dar în ochii Poporului, cine, întrebăm, a dat acestor insecte asemenea instincte, admirabile, care le dirigează la o lucrare aşa de perfectă. Cine, altul, răspundem, decât Geometrul Suveran, Divinitatea, despre care Platon printr'un sentiment, care se verifică din ce în ce mai mult, pe măsură ce se pătrunde mai departe în opera naturii, căci el face totul cu număr, cu pondere şi cu măsură"*.
Cartea este tipărit de către *„Gazeta Matematică"* şi face parte din: *Biblioteca Matematică „George Ţiţeica"* O recomandăm călduros corespondenţilor noştrii care se pot adresa la *Gazeta Matematică* Calea Griviţei No. 158, Bucureşti trimiţând suma de 135 lei.

4. *P. Sergescu*. Sur l'identité des auteurs de quelques articles mathématiques insérés dans „le journal des savants", 1684—1703. (Analele Academiei Române, T XVII).

5. *Michel Ghermanescu*. Equations fonctionnelles linéaires du premier ordre. (Mathematica, Vol XVIII, 1942).

6. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur une quadrique attachée a une courbe gauche sur une classe de surface. (Extrait des „Disquisitiones Mathematicae et Physicae, t II, fasc. I, 1942).

7. *I. G. Murgulescu* und *C. Drăgulescu*. Über die Verwendung der Hexamminkolalt III-salze (Luteskolaltsalze) in der quantitativen Analyse. (Sonderabdruck aus „zeitschrift für analytische chemie. Bd. 123, Heft 7 und 8, München).

8. Solemnitatea deschiderii cursurilor Politechnicei din Bucureşti. Proclamarea D-lui Prof. Onorar *N. Vasilescu Karpen*, Dr. honoris causa al Politechnicei din Bucureşti, 19 Octomvrie 1941.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 414. — *Pe două drepte fixe* Δ *şi* Δ_1 *se iau punctul* A *pe prima şi* B *pe a doua. Prin* A *şi* B *fixe se duc dreptele* δ *şi* δ_1 *astfel ca unghiurile formate de perechile de drepte* (Δ, δ) *şi* (Δ_1, δ_1) *să fie egale. Se cere locul intersecţiei dreptelor* δ *şi* δ_1. *Fie apoi* M *un punct al acestui loc geometric. Să se arate că suma unghiurilor ascuţite făcute de* MA *cu* Δ_1 *şi* MB *cu* Δ *este constantă.*

EM. STEFANESCU.

Notăm cu C intersecţia dreptelor Δ, Δ_1 şi cu x unghiul ascuţit pe care-l face δ cu Δ şi δ_1 cu Δ_1.

Pentru o valoare dată lui x se pot duce două drepte δ, δ' prin A, care să facă acest unghiu cu Δ. La fel se pot duce dreptele δ_1, δ_1' prin B_1 care fac unghiul x cu Δ_1. Intersecţiile acestor 4 drepte δ dau 4 puncte M, pe care le-am notat pe figură cu M, M', N şi N'.

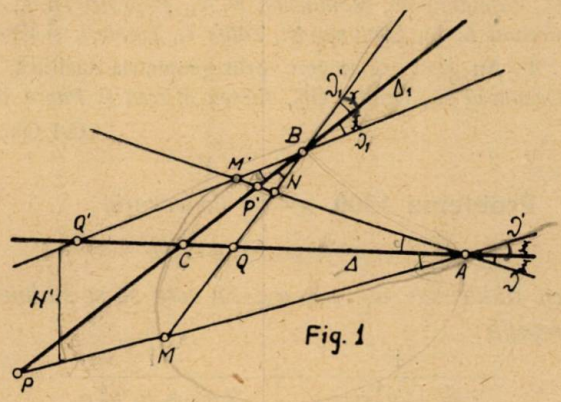


Fig. 1

Căutarea locului acestor puncte se face urmărind dispoziţia figurei după valorile lui x. Pe figura precedentă se vede că

(1) $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CBM = \sphericalangle CBM' = x$,

ceea ce arată că punctele M şi M' se află *pe cercul circumscris triunghiului* ABC.

Toate punctele cercului fac parte din loc pentru că pentru oricare din aceste puncte avem

$$\overset{\frown}{CBM} = \overset{\frown}{CAM}.$$

Considerând punctele N şi N' şi urmărind figura avem

$$\overset{\frown}{NBA} = \overset{\frown}{CBA} - x$$

$$\overset{\frown}{NAB} = \overset{\frown}{CAB} - x$$

(2)$_{**}$ $\overset{\frown}{NBA} - \overset{\frown}{NAB} = \overset{\frown}{CBA} - \overset{\frown}{CAB} = \text{const.}$

$$\overset{\frown}{N'BA} = \overset{\frown}{CBA} + x$$

$$\overset{\frown}{N'AB} = \overset{\frown}{CAB} + x$$

(3)$_{**}$ $\overset{\frown}{N'BA} - \overset{\frown}{N'AB} = \overset{\frown}{CAB} = \overset{\frown}{CBA} = \text{const.}$

Triunghiurile ABN şi ABN', conform relaţiilor (2) şi (3) au diferenţa unghiurilor din A şi B constantă deci, după o teoremă cunoscută, vârful al treilea descrie hiperbola echilateră circumscrisă triunghiului ABC.

Toate punctele hiperbolei, fac parte din loc.

Partea a doua a problemei. Fie P şi Q intersecţia lui AM cu Δ_1 şi a lui BM cu Δ. Din triunghiurile MPB şi QCB se scoate

$$\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{MPB} + x$$

$$\overset{\frown}{AQB} = \overset{\frown}{QCB} + \overset{\frown}{QBC}.$$

De unde

$$\overset{\frown}{MPB} = \overset{\frown}{AMB} - x = \overset{\frown}{ACB} - x$$

$$\overset{\frown}{AQB} = \overset{\frown}{ACB} + x$$

$_{**}$ $\overset{\frown}{MPB} + \overset{\frown}{AQB} = 2\overset{\frown}{ACB} = \text{const.}$

La fel dacă P' şi Q' sunt intersecţiile lui Δ_1 cu AM' şi ale lui Δ cu BM' avem

$$\overset{\frown}{AP'B} = \overset{\frown}{AM'B} + x = \overset{\frown}{ACB} + x$$

$$\overset{\frown}{AQ'B} = \overset{\frown}{ACB} - x,$$

care prin adunare dau

$$\overset{\frown}{AD'B} + \overset{\frown}{AQ'B} = 2\overset{\frown}{ACB}.$$

Pentru N şi N' se vede că AN, AN' taie pe Δ_1 în P' şi P iar BN şi BN' taie pe Δ în Q şi Q' şi avem

$$\overset{\frown}{AP'B} = \overset{\frown}{AM'B} + x = \overset{\frown}{ACB} + x$$

$$\overset{\frown}{AQB} = \overset{\frown}{ACB} + x$$

$$\overset{\frown}{AP'B} - \overset{\frown}{AQB} = 0$$

şi

$$\overset{\frown}{APB} = \overset{\frown}{ACB} - x$$

$$\overset{\frown}{AQ'B} = \overset{\frown}{ACB} - x$$

$$\overset{\frown}{APB} - \overset{\frown}{AQ'B} = 0.$$

Partea a doua a problemei trebuie deci enunţată astfel: *Să se arate că suma sau diferenţa unghiurilor ascuţite făcute de* A M *cu* Δ_1 *şi de* B M *cu* Δ *este constantă.*

Observaţiuni. 1°. Problema se rezolvă prin geometria analitică în felul următor: Fie Δ şi perpendiculara în C pe Δ axele de coordonate faţă de care avem $A(a, o)$ şi $B(b, c)$. Notăm cu θ unghiul pe care-l face δ cu Δ şi căruia î-i dăm sensul indicat pe fig. 2.

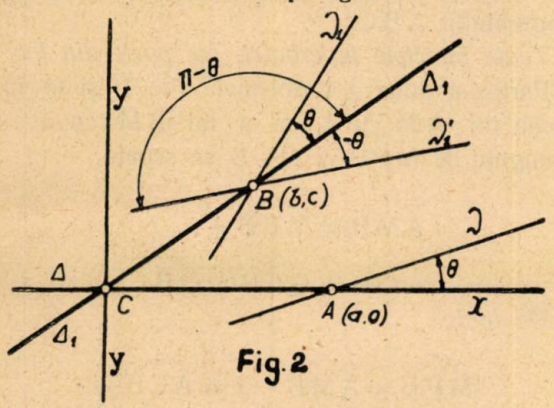


Fig. 2

Prin B se duc dreptele δ şi δ'_1 care fac cu Δ_1 unghiurile θ şi $\pi - \theta$. Ecuaţiile dreptelor Δ_1, δ, δ_1 şi δ'_1 sunt respectiv

$$(\Delta_1) \qquad y = \frac{b}{c}\, x = m\, x$$

$$(\delta) \qquad y = \lambda\,(x-a) = (x-a)\operatorname{tg}\theta$$

$$(\delta_1) \qquad y - c = \mu\,(x-b)$$

$$(\delta'_1) \qquad y - c = \mu'(x-b).$$

Tangenta unghiului făcut de δ_1 şi δ'_1 cu Δ_1 este

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m-\mu}{1+m\,\mu} = \lambda$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\theta) = -\operatorname{tg}\theta = \frac{m-\mu'}{1+m\,\mu'} = -\lambda.$$

Cu acestea, ecuaţiile (δ) devin

$$(1) \qquad y = \frac{m-\mu}{1+m\,\mu}\,(x-a)$$

$$(2) \qquad y = \frac{m-\mu'}{1+m\,\mu'}\,(x-a).$$

Eliminând pe μ între (δ_1) şi (1) şi pe μ' între (δ'_1) şi (2) găsesc, după efectuarea calculelor în care ţinem seamă că, conform cu (Δ_1) avem

$$c = m\,b$$

găsim că locul lui M se compune din hiperbola echilateră

$$m\,x^2 - 2\,x\,y - m\,y^2 - a\,m\,x + (a + b + m\,c)\,y = 0,$$

şi din cercul

$$m\,x^2 + m\,y^2 - a\,m\,x + (a - b - m\,c)\,y = 0,$$

ambele circumscrise triunghiului A B C.

Partea a doua nu prezintă de cât interes de calcul.

2°. Nici unul din cei 20 corespondenţi care au încercat să rezolve această problemă, nu au examinat toate cazurile de figură, de aceia nici nu au găsit locul geometr complect. c

3°. Au găsit ca loc cercul A B C, pe cale geometrică d-nii: *Ardelean R., Beldie D., Botea G. N., Braeşter O., Cernes A. M, Constantinescu G. G, Dorneanu S. V., Ionescu A. Şt., Lepădatu M, Mihăileanu N. N., Popovici Th. I., Râmniceanu L. R., Simionov K., Tâtaş V., Ţigoiu I.* şi *Vlădea I.*

4°. Au găsit acelaş cerc, prin geometria analitică, Dnii: *Deoancea N, Gradin Gh., Iliescu Mircea* şi *Pasco W.*

G-l Gh. B.

Problema 1300. — *Se dă ecuaţia*

$$x^3 + p\,x + q = 0$$

cu rădăcinele α_1, α_2, α_3. *Se cere să se stabilească relaţia:*

$$\frac{1}{2\,\alpha_1^6 + \alpha_1^4\,\alpha_2\,\alpha_3} + \frac{1}{2\,\alpha_2^6 + \alpha_1\,\alpha_2^4\,\alpha_3} + \frac{1}{2\,\alpha_3^6 + \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3^4} = \frac{p^3+q^2}{q^4}.$$

V. ALACI

Prima soluţie. Însemnând cu E primul membru şi având în vedere relaţiile cunoscute

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \qquad \alpha_1\,\alpha_2 + \alpha_2\,\alpha_3 + \alpha_3\,\alpha_1 = p, \qquad \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = -q \quad \text{şi} \quad \alpha_1^3 = -p\,\alpha_1 - q,$$

putem scri:

$$E = \sum \frac{1}{\alpha_1^3\,(2\,\alpha_1^3 + \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)} = \sum \frac{1}{(p\,\alpha_1 + q)\,(2\,p\,\alpha_2 + 3\,q)} = \frac{M}{N},$$

unde

$$M = \sum (p\,\alpha_2 + q)\,(2\,p\,\alpha_2 + 3\,q)\,(p\,\alpha_3 + q)\,(2\,p\,\alpha_3 + 3\,q)$$

$$= \sum [q^2 + p\,q\,(\alpha_2 + \alpha_3) + p^2\,\alpha_2\,\alpha_3]\,[9\,q^2 + 6\,p\,q\,(\alpha_2 + \alpha_3) + 4\,p^2\,\alpha_2\,\alpha_3]$$

$$= \sum [9\,q^4 + 9\,p\,q^3(\alpha_2 + \alpha_3) + 9\,p^2\,q^2\,\alpha_2\,\alpha_3 + 6\,p\,q^3(\alpha_2 + \alpha_3) + 6\,p^2\,q^2(\alpha_2 + \alpha_3)^2 +$$

$$6\,p^3\,q\,\alpha_2\,\alpha_3\,(\alpha_2 + \alpha_3) + 4\,p^2\,q^2\,\alpha_2\,\alpha_3 + 4\,p^3\,q\,\alpha_2\,\alpha_3\,(\alpha_2 + \alpha_3) + 4\,p^4\,\alpha_2^2\,\alpha_3^2]$$

$$= 27\,q^4 + 25\,p^2\,q^2 \sum \alpha_2\,\alpha_3 + 12\,p^3\,q^2 \sum \alpha_2^2 + 10\,p^3\,q \sum \alpha_2\,\alpha_3\,(-\alpha_1) + 4\,p^4 \sum \alpha_2^2\,\alpha_3^2 .$$

Cum avem,

$$\sum \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2\,(\alpha_1\,\alpha_2 + \alpha_2\,\alpha_3 + \alpha_3\,\alpha_1) = -2\,p\,,$$

$$\sum \alpha_2^2\,\alpha_3^2 = (\alpha_1^2\,\alpha_2^2 + \alpha_2\,\alpha_3 + \alpha_3\,\alpha_1)^2 - 2\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \sum \alpha_1 = p^2\,,$$

mai putem scri

$$M = 27\,q^4 + 25\,p^3\,q^2 - 24\,p^3\,q^2 + 30\,p^3\,q^2 + 4\,p^6 = 27\,q^4 + 31\,p^3\,q^2 + 4\,p^6$$

$$= 27\,q^4 + 4\,p^3\,q^2 + 27\,p^3\,q^2 + 4\,p^6 = q^2\,(27\,q^2 + 4\,p^3) + p^3\,(27\,q^2 + 4\,p^3)\,,$$

sau

$$M = (27\,q^2 + 4\,p^3)\,(p^3 + q^2)\,. \tag{2}$$

Apoi,

$$N = (p\,\alpha_1 + q)\,(p\,\alpha_2 + q)\,(p\,\alpha_3 + q)\,(2\,p\,\alpha_1 + 3\,q)\,(2\,p\,\alpha_2 + 3\,q)\,(2\,p\,\alpha_3 + 3\,q)$$

$$= (q^3 + q^2\,p \sum \alpha_1 + q\,p^2 \sum \alpha_1\,\alpha_2 + p^3\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)\,(27\,q^3 + 18\,p\,q^2 \sum \alpha_1 + 12\,p^2\,q \sum \alpha_1\,\alpha_2 + 8\,p^3\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$$

$$= (q^3 + q\,p^3 - q\,p^3)\,(27\,q^3 + 12\,p^3\,q - 8\,p^3\,q) = q^3\,(27\,q^3 + 4\,p^3\,q)\,,$$

sau

$$N = q^4\,(27\,q^2 + 4\,p^3), \tag{3}$$

Înlocuind valorile lui M şi N din (2) şi (3) în (1), avem după simplificare,

$$E = \frac{p^3 + q^2}{q^4}\,,$$

tocmai relaţia cerută.

Soluţii analoage date d-ra: *Savin Maria* (Iaşi) şi de d-nii: *Amăreşteanu F. Marcel* (Craiova), *Cazanacli P.* (Chişinău), *Negrea A Mircea* (Brăila), *Popoviciu I. Gavril* şi *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara).

Soluţia 2-a. În articolul *„O clasă de identităţi algebrice“* din „R. M. T.“, Vol. XIII, p. 123. autorul problemei, stabileşte că, dacă α_1, α_2, α_3 sunt rădăcinele ecuaţiei

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + x^3 = 0, \tag{1}$$

atunci avem identitatea

$$\sum \frac{1}{\alpha_1^4\,(\alpha_1 \quad \alpha_2)\,(\alpha_1 - \alpha_3)} = \frac{1}{a_0^4} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_8 \\ 1 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Dacă particularizăm ecuaţia (1) luând

$$a_0 = q, \qquad a_1 = p, \qquad a_2 = 0$$

şi observăm că

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) = \alpha_1^2 - \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_2\,\alpha_3$$

$$= 2\,\alpha_1^2 + \alpha_2\,\alpha_3\,,$$

fiindcă

$$\alpha_2 + \alpha_3 = -\alpha_1\,,$$

atunci ecuaţia (1) devine

$$x^3 + p\,x + q = 0,$$

iar relaţia (2) se poate scri

$$\sum \frac{1}{\alpha_1^4\,(2\,\alpha_1^2 + \alpha_2\,\alpha_3)} = \frac{1}{q^4} \begin{vmatrix} p & q & 0 \\ 0 & p & q \\ 1 & 0 & p \end{vmatrix} = \frac{p^3 + q^2}{q^4},$$

tocmai identitatea cerută.

Soluţii analoage date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Pompeiu Marica* (Beiuş) şi *Popa N.* (Beiuş).

Problema 1891 — *Să se demonstreze identitatea:*

$$\Sigma(x-y)(z^5+x^2y^3+x^3y^2) = (x+y+z)(x^4y-xy^4+y^4z-yz^4+xz^4-x^4z).$$

A. GLODEN

Soluţie. Însemnând cu E al 2-lea membru şi efectuând calculele, putem scri succesiv

$$\begin{aligned} E = {} & x^5y-x^2x^4+xy^4z-xy^4z+x^2z^4-x^5z+ \\ & x^4y^2-xy^5+y^5z-y^2z^4+xyz^4-x^4yz+ \\ & x^4yz-xy^4z+y^4z^2-yz^5+xz^5-x^4z^2 \\ = {} & x^5(y-z)+y^5(z-x)+z^5(x-y)+x^2y^2(x^2-y^2)+ \\ & x^2z^2(z^2-x^2)+y^2z^2(y^2-z^2). \end{aligned}$$

Mai putem scri

$$\begin{aligned} E &= \Sigma[(x-y)z^5+(x^2-y^2)x^2y^2] \\ &= \Sigma(x-y)[z^5+(x+y)x^2y^2], \end{aligned}$$

sau

$$E = \Sigma(x-y)(z^5+x^2y^3+x^3y^2).$$

Identitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţie dată de d-ra *Mang Ileana* (studentă, Timişoara), *Bakonyi C.* (Polit, Timişoara), *Boleanţu Lazăr* (Polit., Timişoara), *Goga Florian* (stud Timişoara), *Ionescu F. Petre* (Colegiul, Craiova), *Lupescu Corneliu* (S-lt, Roman), *Schapira Salo* (Piatra-Neamţ), *Simon Ş. Petru* (lic. Arad), *Vasiliu Gh D-tru* (lic. Milit., Timişoara), *Voronca Horia* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2034. — Să se găsească un număr de cinci cifre, în care cifra mijlocie este zero, numărul format de primele două cifre este dublul celui format de ultimele două, care număr să fie produsul unui număr de două cifre prin altul de trei, ce se obţine din primul intercalând un zero între cifrele acestuia.

M. GHERMANESCU

2035. — Să se găsească un patrat de opt cifre, care se transformă într'un al doilea patrat, când se măreşte cu o unitate a 2-a sa cifră de la stânga.

V. THÉBAULT

2036. — Se dă numărul abc care înmulţit cu 909 dă un alt număr de forma $aabbcc$. La primul număr, cifra din mijloc este egală cu suma celorlalte două cifre, iar câtul dintre primul număr şi semi-suma cifrelor lui are forma cc.

CICERONE IOSIFESCU

2037. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} bx(1-y^2) = ay(1-x^2) \\ 2x(1-y^2) = a(1+x^2)(1+y^2) \end{cases}$$

şi să găsească valorile exacte ale necunoscutelor pentru $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{1}{4}$.

FLORIAN I. GOGA

2038. — Se dă un trapez ABCD, în care se cunosc

$$AC=\alpha, \quad BD=\beta,$$

iar o dreaptă perpendiculară pe laturile paralele este împărţită de punctul de intersecţie al diagonalelor în segmentele m şi n.

Se cere să se găsească.

1°. Suprafaţa trapezului.

2°. Unghiul sub care se tae cele două diagonale.

MIHAIL ST. BOTEZ

2039. — Se dă un triunghiu dreptunghic OAB. Pe cateta OA ca diametru se descrie un semicerc care taie ipotenuza în C.

Apoi din O ca centru se descrie un alt semicerc ce trece prin A, întâlneşte în D ipotenuza şi în E prelungirea catetei OA. Fie F mijlocul semicercului cu centru în O şi G piciorul perpendicularei din D pe raza OF. În G se duce o perpendiculară GH (H pe OA) pe EG şi fie I intersecţia ipotenuzei OB cu perpendiculara în H pe OA. Se cere să se rezolve triunghiul ACI, cunoscând

$$OA=a \qquad \text{şi} \qquad \sphericalangle AOB=\theta.$$

V. ALACI

2040. — Fie A, B, C trei puncte mobile pe o sferă şi M un punct exterior sferei, din care laturile triunghiului ABC se văd sub unghiuri drepte.

Se cere locul geometric al ortocentrului triunghiului ABC, când M este fix.

G-L GH. BUICLIU

2041. — Să se arate că dacă avem

$$\sec a+\sec b+\sec c=0$$

vom avea şi

$$\Sigma\cos a(\sin^2 b+\sin^2 c)=3\cos a\cos b\cos c+2\Sigma\cos a.$$

IONEL I. STAMATE

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.

2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.

3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,

4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XX, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XX, cu preţul de lei 200 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXII. IUNIE 1942 No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

BIBLIOTECA CENTRALA ... SIBIIU

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE" (URMARE).

2. NOTE MATEMATICE: 9 10, 11.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 1174, 1325, 1646 si 1880, 1871, 1875,

5. PROBLEME PROPUSE: 2042 — 2049.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Din cauza scumpirei hârtiei şi a tiparului am fost obligaţi a mări costul abonamentului pentru anul 1942 la 180 (una sută optzeci) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — NO. 4 TIMISOARA, IUNIE 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE"

DE

V. ALACI.

(urmare)

Coordonate ortorombice.

33. Când avem un punct P de *coordonate rombice* $(r, \theta; \varphi)$, coordonate definite la începutul acestei lucrări în § 2, convenim de aci înainte pentru simplificarea expunerei, ca atunci când unghiul auxiliar φ este $\frac{\pi}{2}$, să numim coordonatele r, θ, *coordonate ortorombice*, această denumire implicând $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Cisoida oblică dublă.

34. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică*

(89) $$r = 2a \sin^2(\theta + \alpha), \qquad (a > 0).$$

Prima soluție. Configurația (89) este simetrică în raport cu origina O într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$, fiindcă înlocuind θ prin $\pi + \theta$, r rămâne neschimbat

Vom construi dar configurația (89) întâi în cadranele I, IV și apoi, vom întregi părțile aflate cu simetricele lor față de origina O.

În acest scop efectuăm următoarea construcție prin puncte:

Descrim un cerc C *de rază a, ducem un diametru fix* O A, *o secantă variabilă* O β *și o altă secantă fixă* O γ *mai jos de* O A, *astfel ca*

$$\sphericalangle A O \gamma = \alpha.$$

Luăm apoi pe cerc în senz pozitiv un arc

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{\gamma\beta},$$

prin M *ducem coarda* M N *paralelă la* O A *și proiectăm* N *în* N_1 *pe* O A.

Intersecția P *a dreptelor* NN_1, O β, *aparține configurației* (89), fig. 26.

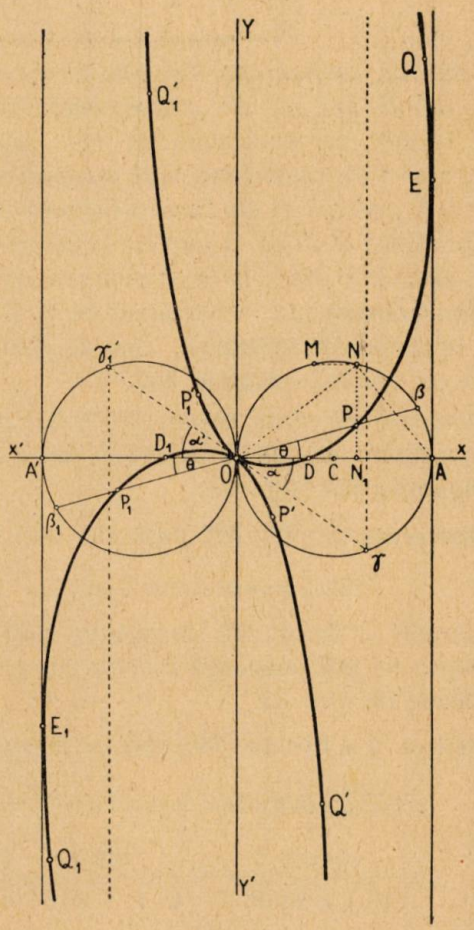


Fig. 26.

Justificăm această afirmare, arătând că, *coordonatele ortorombice* ale lui P, care pe figură sunt

$$r = ON_1, \qquad \theta = \sphericalangle AOP,$$

satisfac ecuaţia (89), (OA şi perpendiculara pe ea în O fiind alese ca un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$).

În adevăr, fiindcă $\sphericalangle AOM = \sphericalangle OAN = \theta + \alpha$, din triunghiurile dreptunghice ON_1N, ONA avem respectiv

$$ON_1 = ON \sin(\theta + \alpha),$$

$$ON = 2a \sin(\theta + \alpha)$$

şi prin înmulţire obţinem

$$ON_1 = 2a \sin^2(\theta + \alpha),$$

sau

$$r = 2a \sin^2(\theta + \alpha),$$

tocmai ecuaţia (89). Punctul P a fost astfel bine definit.

Variind secanta $O\beta$, obţinem analog lui P alte puncte ale configuraţiei (89) şi fiindcă

$$r' = 2\alpha \sin 2(\theta + \alpha),$$

următorul tablou de variaţie:

θ	0	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi - \alpha$	2π
r	$2a\sin^2\alpha$	$2a$	$2a\cos^2\alpha$		$2a\cos^2\alpha$	0	$2a\sin^2\alpha$
r'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

ne arată că, *configuraţia* (89) *este formată din ramura infinită* DPEQ *din primul cadran*, (tangentă în E la AE perpendiculară pe OA, iar din E ramura se ridică asimptotic spre perpendiculara în γ pe OA), *precum şi din ramura infinită* $Q'P'OD$ *din cadranul al 4-lea* (asimptotă la perpendiculara în γ pe OA şi având în O un punct de întoarcere).

Prima ramură are în parcursul de la E la infinit, un punct de inflexiune, care se poate determina cu ajutorul ecuaţiilor (84).

Intregind cele două ramuri DPEQ, $Q'P'OD$, *cu simetricele lor faţă de origina* O, *avem întreaga configuraţie* (89), (fig. 26).

Observare. Ecuaţia (89) pusă sub forma

$$2ar = 4a^2 \sin^2(\theta + \alpha),$$

ne permite a da o altă construcţie prin puncte configuraţiei (89), analoagă *construcţiei* a 4-a, din problema de la § 32.

Soluţia 2 a. Ecuaţia (89), care se mai poate scri

$$r = 2a(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)^2 =$$

$$2a\left(\frac{\cos\alpha \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}\right)^2,$$

transpusă în *coordonate rectangulare*, în baza formulelor (9'), devine

$$89') \qquad \pm x(x^2+y^2) = 2a(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2,$$

unde semnul + de la început corespunde cadranelor I, IV, iar semnul — corespunde cadranelor II, III.

Dintre cele două cubice (89'), care sunt nişte *cisoide oblice*[1], trebuie să reţinem din prima numai părţile din cadranele I, IV, adică ramurile infinite DPEQ, $Q'P'OD$, iar din cea de a 2-a cubică, trebuie să reţinem numai părţile din cadranele II şi III, simetricele celor dintâi faţă de origina O.

Găsim prin urmare aceiaşi configuraţie ca în prima soluţie.

Observare. Configuraţia (89), care este o curbă nouă, fiind formată din două *cisoide oblice*, am numit'o **cisoida oblică dublă.**

Cisoidala ortorombică.

35. **Problemă.** *Se cere configuraţia de ecuaţie ortorombică*

$$(90) \qquad r = a\,sp^2\theta, \qquad (a > 0).$$

Prima soluţie. Configuraţia (90) este simetrică faţă de axe şi origina lor, într'un sistem de axe rectangulare, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi \mp \theta$, r rămâne acelaşi.

Vom construi dar configuraţia (90) numai pentru

[1]) Dr. *Gomes Teixeira:* Lucrare citată, Vol. I, p. 12.

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ şi o vom întregi cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor.

Pentru aceasta, efectuăm următoarea construcţie prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *luăm pe* Ox, Oy *segmentele* $OA = OB = a$ *şi unim* A *cu* B *printr'un segment de dreaptă.*

Ducem apoi din O *două semi-drepte variabile ce întâlnesc pe* AB *în* M, N *astfel ca*

$$\sphericalangle BOM = \sphericalangle AON = \theta,$$

iar din M_1 *piciorul perpendicularei din* M *pe* Ox, *ducem o paralelă la* AB, *care întâlneşte în* P *pe* OM.

Intersecţia I *a lui* ON *cu perpendiculara* PP_1 *pe* Ox, *aparţine configuraţiei* (90), (fig. 27).

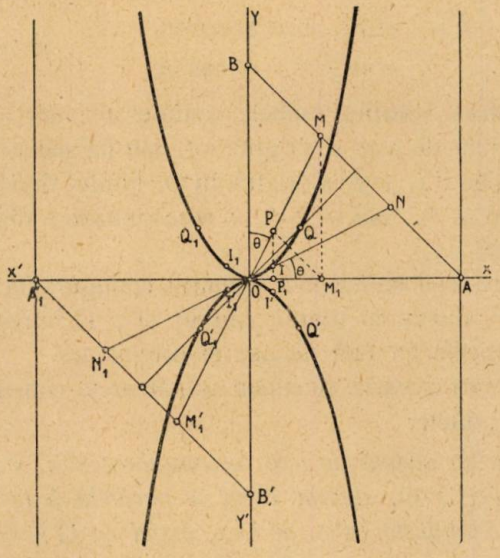


Fig. 27.

Justificăm această afirmare, arătând că, *coordonatele ortorombice* ale punctului I, care din figură sunt

$$r = OP_1, \qquad \theta = \sphericalangle xOI,$$

satisfac ecuaţia (90).

În adevăr, din triunghiurile dreptunghice OP_1P, OM_1M, conform *teoremei I-a* de la triunghiurile dreptunghice din *„Trig. patratică“*, avem respectiv

$$OP_1 = (OP_1 + P_1P)\, cp\, \widehat{P_1OP} = OM_1\, sp\, \theta,$$

$$OM_1 = (OM_1 + M_1M)\, cp\, \widehat{M_1OM} = a\, sp\, \theta$$

şi prin înmulţire obţinem

$$r = a\, sp^2\, \theta,$$

tocmai ecuaţia (90). Punctul I a fost astfel bine definit.

Variind θ în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, obţinem alte puncte analoage lui I şi observând tabloul de variaţie

θ	0	45°	90°
r	0	$\frac{a}{4}$	a

,

deducem că, configuraţia (90), în primul cadran, este formată din arcul infinit OIQ, care se ridică asimptotic spre perpendiculara în A pe Ox.

Complectând arcul OIQ cu simetricele lui faţă de axe şi origina lor O, avem întreaga configuraţie (90).

Prin urmare: *Configuraţia* (90) *este formată astfel din ramurile* OIQ, $OI'Q'$, OI_1Q_1, OI'_1O_1, *având ca asimptote, perpendicularele în* A *şi* A' *pe axa* $x'x$.

Observare. Se ştie că, având două curbe C_1, C_2 de *ecuaţii polare*

$$\varrho_1 = f_1(\theta), \qquad \varrho_2 = f_2(\theta),$$

atunci curba

$$\varrho = \varrho_1 - \varrho_2 \tag{91}$$

se numeşte *cisoidala curbelor date*[1], păstrându-se numele de *cisoidă* pentru cazul particular când una din curbe este o dreaptă, iar cealaltă un cerc.

Cum ecuaţia (90) se poate scri încă, pentru primul cadran,

$$r = a\, sp\, \theta\, (1 - cp\, \theta) = r_1 - r_2,$$

unde:

$$r_1 = a\, sp\, \theta, \qquad r_2 = a\, sp\, \theta\, cp\, \theta,$$

înseamnă că este de forma (91) (prin înmulţirea cu $\cos\theta$) şi astfel am fost îndreptăţiţi a numi configuraţia (90) **cisoidală ortorombică,** ea conţinând *coordonate ortorombice*

Soluţia 2-a. Din cauza simetriei configuraţiei (90) faţă de axe şi origina lor, vom transpune ecuaţia (90),

[1]) Dr. *Gomes Teixeira:* Lucrare citată, p. 16

numai pentru primul cadran, în *coordonate carteziene.*

Cum ecuaţia (90), în baza primei formule din tabloul (11), „*Trig. Patratică*“, se poate scri

$$r = a\,\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{(1+\operatorname{tg}\theta)^2},$$

trecută în *coordonate carteziene,* cu mijlocirea formulelor de transformare (9′) pentru primul cadran, devine

$$x\,(x+y)^2 = a\,y^2. \tag{90′}$$

Din această cubică vom reţine evident, numai partea din primul cadran, apoi vom lua simetricele părţei aflate faţă de axe şi origina lor pentru a avea în întregime configuraţia (90).

Construirea prin puncte a cubicei $x\,(x^2+y^2) = a\,y^2$.

36. Efectuăm următoarea construcţie prin puncte, sugerată de prima soluţie a problemei de la § 35.

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *ducem întâi dreapta fixă* AB *astfel ca*

$$OA = OB = a,$$

precum şi dreptele variabile OM, ON; M, N *pe* AB, *simetric faţă de mijlocul lui* AB.

Din M_1, *proecţia lui* M *pe* Ox, *ducem o paralelă la* AB *care taie pe* OM *în* P *şi fie* I *intersecţia lui* ON *cu perpendiculara* PP_1 *pe* Ox.

Locul geometric a lui I *este cubica cerută,* (fig. 27, unde AB trebuie prelungit de o parte şi alta, pentru a obţine întreaga cubică).

În adevăr, notând $\sphericalangle xON = \theta$, rezultă că şi $\sphericalangle yOM = \theta$ şi atunci M este intersecţia dreptelor

$$\begin{cases} x+y=a \\ y = x\operatorname{cotg}\theta. \end{cases}$$

De aci deducem,

$$x = \frac{a}{1+\operatorname{cotg}\theta},$$

ecuaţia dreptei MM_1.

De altă parte, punctul P este intersecţia dreptelor

$$\begin{cases} x+y = \dfrac{a}{1+\operatorname{cotg}\theta} \\ y = x\operatorname{cotg}\theta, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$x = \frac{a}{(1+\operatorname{cotg}\theta)^2},$$

ecuaţia dreptei PP_1.

În fine, punctul I este intersecţia dreptelor

$$\begin{cases} y = x\operatorname{tg}\theta \\ x = \dfrac{a}{(1+\operatorname{cotg}\theta)^2}. \end{cases}$$

Eliminând θ între aceste ecuaţii, avem

$$x\,(x+y)^2 = a\,y^2,$$

tocmai cubica cerută.

Concoidele duble ale lui Sluse.

37. **Problemă.** *Se cer configuraţiile de ecuaţii ortorombice*

$$a\,(r-a) = b^2\cos^2\theta, \tag{92}$$

$$a\,(a-r) = b^2\cos^2\theta, \tag{93}$$

$(a>0)$.

Prima soluţie. Ambele configuraţii sunt simetrice faţă de axe şi origina lor, într'un sistem rectangular $x'x$, $y'y$ cu origina în O, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi+\theta$, r corespunzător rămâne acelaşi.

Este deci suficient a construi configuraţiile (92) şi (93) numai în primul cadran şi a le întregi cu simetricele lor faţă de axe şi origina lor.

Pentru aceasta efectuăm următoarele construcţii prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *ducem întâi o paralelă* Δ *la* $y'y$, *care întâlneşte în* A *pe* Ox, *astfel ca* $OA = a$ *şi mai ducem două semi-drepte variabile* OM, ON *situate în primul cadran astfel ca*

$$\sphericalangle xOM = \sphericalangle yON = \theta.$$

Luăm apoi pe ON *segmentul* $OB = b$, *ducem prin* B *a paralelă la* Ox, *care taie pe* Δ *în* C, *iar în* C *ridicăm o perpendiculară pe* OC *ce taie în* D *axa* Ox.

Intersecţia P *a lui* OM *cu perpendiculara ridicată în* D *pe* Ox, *aparţine configuraţiei* (92), (fig. 28).

Dacă păstrăm comstrucţia expusă până ce am obţinut punctul D, *iar mai departe luăm* D′ *simetricul punctului* D *faţă de* A, *atunci intersecţia* Q

a lui O M *cu perpendiculara în* D′ *pe* O *x*, *aparţine configuraţiei* (93), (fig. 29).

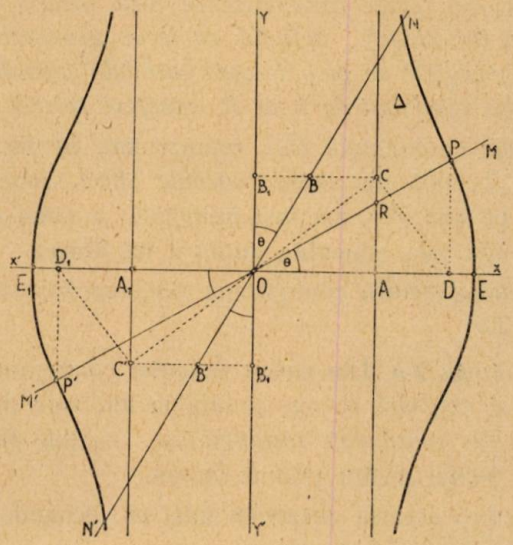


Fig. 28.

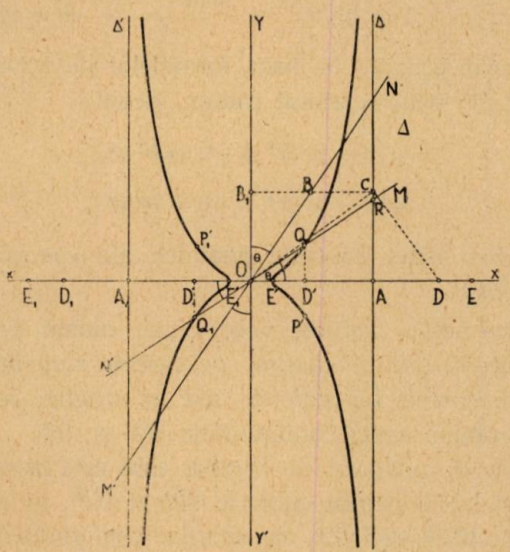


Fig. 29.

Pentru a motiva că, *coordonatele ortorombice* ale punctului P, care în fig. 28 sunt

$$r = OD, \qquad \theta = \sphericalangle xOP,$$

satisfac ecuaţia (92), prelungim întâi pe B C până taie în B_1 pe O *y* şi observăm că, în triunghiul dreptunghic OB_1B, avem

$$OB_1 = OB\cos\theta = b\cos\theta,$$

deci şi

$$AC = b\cos\theta.$$

Apoi în triunghiul dreptunghic O C D, putem scri

(94) $$\overline{AC}^2 = \overline{OA}\cdot\overline{AD} = \overline{OA}\cdot(\overline{OD} - \overline{OA}),$$

sau

$$b^2\cos^2\theta = a(r-a),$$

tocmai ecuaţia (92). Punctul P a fost astfel bine determinat.

Variind θ în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, obţinem alte puncte analoage lui P, care unite ne dau ramura infinită E P asimptotă la Δ, fiindcă pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, avem $r = 0$; pe această ramură găsindu se evident şi un punct de inflexiune.

Complectând ramura E P *cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor, obţinem în întregime configuraţia* (92).

Pentru a motiva de asemeni că, *coordonatele ortorombice* ale punctului Q, care în fig. 29 sunt

$$r = OD', \qquad \theta = \sphericalangle xOQ$$

satisfac ecuaţia (93), vom observa că relaţia stabilită (94) se mai poate scri

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}\cdot\overline{AD'} = \overline{OA}\cdot(\overline{OA} - \overline{OD'}),$$

sau

$$b^2\cos^2\theta = a(a-r),$$

tocmai ecuaţia (93). Punctul Q a fost astfel bine definit.

Variind şi aci θ în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, obţinem alte puncte analoage lui Q, care unite ne dau ramura infinită E′ Q, pe această ramură găsindu-se evident şi un punct de inflexiune.

Complectând ramura E′ Q *cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor, obţinem în întregime configuraţia* (93).

Determinarea punctului de inflexiune a configuraţiei (92).

Avem,

$$r = \frac{a^2 + b^2\cos^2\theta}{a}, \qquad r' = -\frac{b^2\sin 2\theta}{a},$$

$$r'' = -\frac{2b^2\cos 2\theta}{a}.$$

Înlocuind aceste valori în a 2-a din ecuațiile (84), care dau punctul de inflexiune, avem

$$\frac{a^2+b^2\cos^2\theta}{a}\left(-\frac{2b^2\cos 2\theta}{a}+\frac{2b^2\sin 2\theta}{a}\operatorname{tg}\theta\right)$$

$$=2\frac{b^4\sin^2 2\theta}{a^2},$$

sau

$$(a^2+b^2\cos^2\theta)\cos 3\theta+b^2\sin^2 2\theta\cos\theta=0.$$

Mai putem scri

$$(a^2+b^2\cos^2\theta)(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+b^2\sin^2 2\theta\cos\theta=0,$$

sau

$$(a^2+b^2\cos^2\theta)(1-4\sin^2\theta)+4b^2\sin^2\theta\cos^2\theta=0.$$

De aci deducem

$$a^2+b^2\cos^2\theta-4a^2\sin^2\theta=0,$$

deci

$$\operatorname{tg}^2\theta=\frac{a^2+b^2}{3a^2}.$$

Cum,

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{3a^2}{4a^2+b^2},$$

relațiile (84) devin

$$\begin{cases} r=\dfrac{4a(a^2+b^2)}{4a^2+b^2} \\ \operatorname{tg}^2\theta=\dfrac{a^2+b^2}{3a^2}. \end{cases}$$

Avem astfel *coordonatele ortorombice* ale punctului de inflexiune, din primul cadran, a configurației (92).

Analog aflăm punctul de inflexiune a confiurației (93).

O proprietate geometrică. În figura (28), însemnând cu R intersecția lui OM cu Δ, observăm că OA și AD sunt proecțiile pe Ox a lui OR și RP și deci

$$\overline{OA}\cdot\overline{AD}=\overline{OR}\cdot\overline{RP}\cos^2\theta. \tag{95}$$

Dar,

$$\overline{OA}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}^2=b^2\cos^2\theta,$$

astfel că relația (95) devine

$$\boxed{\overline{OR}\cdot\overline{RP}=b^2}. \tag{96}$$

Această relație caracterizează însă tocmai *concoida lui Sluse*[1], *definită ca locul geometric al unui punct* P *de pe o dreaptă variabilă dusă din* O *și care întâlnind pe* Δ *în* R, *satisface relația* (96).

Cum configurația (92), reprezentată în fig. 28 este formată din două *concoide Sluse*, simetrice față de axa $y'y$, am fost îndreptățit a numi configurația (92), **concoida dublă a lui Sluse.**

Analog pentru configurația (93), reprezentată în fig. 29.

Soluția 2-a. Din cauza simetriei configurațiilor (92) și (93) față de axe și origina lor, vom transpune în *coordonate rectangulare*, ecuațiile (92) și (93), numai pentru primul cadran.

Pentru aceasta observăm întâi că, ecuațiile (92) și (93) se mai pot scri

$$a(r-a)=\frac{b^2}{1+\operatorname{tg}^2\theta},\qquad a(a-r)=\frac{b^2}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$$

și aceste ecuații, în baza formulelor de transformare (9′) pentru primul cadran, devin

$$a(x-a)(x^2+y^2)=b^2x^2, \tag{92′}$$

$$a(a-x)(x^2+y^2)=b^2x^2. \tag{93′}$$

Avem astfel ecuațiile analitice ale *concoidelor lui Sluse.*

Din aceste cubice, vom reține numai părțile situate în primul cadran, pe care le vom întregi cu simetricele lor față de axe și origina lor și vom obține astfel configurațiile (92) și (93).

Este de observat că origina, care este un punct dublu izolat pentru cubicele (92′) și (93′), nu aparține configurației (92), dar aparține configurației (93) în cazul $a\leq b$.

(Va urma)

---

[1]) *Dr. Gomes Teixeira.* Lucrare citată, p, 26.

NOTE MATEMATICE

9. — *Quelques propriétés du millésime 1941.*

Tous les chiffres de ce nombre sont des carrés parfaits.

$$1941 = 3.647;$$

647 est un nombre premier.

$$647 = 25^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 = 23^2 + 10^2 + 3^2 + 3^2 = 21^2 + 14^4 + 3^2 + 1^2.$$

Ceci nous donne l'égalité bigrade

$$\begin{cases} 23 + 10 + 3 = 21 + 14 + 1 \ (= 6^2) \\ 23^2 + 10^2 + 3^2 = 21^2 + 14^2 + 1^2. \end{cases}$$

Décomposition en une somme de 3 carrés:

$$1941 = 44^2 + 2^2 + 1^2 = 41^2 + 16^2 + 2^2 = 34^2 + 28^2 + 1^2 = [2(41 - 19)]^2 + 2^2 + 1^2.$$

Décomposition en une somme de 4 carrés:

$$1941 = 42^2 + 13^2 + 2^2 + 2^2 = 40^2 + 18^2 + 4^2 + 1^2 = 39^2 + 20^2 + 4^2 + 2^2 = 38^2 + 22^2 + 3^2 + 2^2 = 36^2 + 25^2 + 4^2 + 2^2 = 35^2 + 26^2 + 6^2 + 2^2 = 33^2 + 28^2 + 8^2 + 2^2 = 32^2 + 30^2 + 4^2 + 1^2.$$

Nous en déduisons les deux relations bigrades suivantes:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} 39 + 20 + 4 = 38 + 22 + 3 \ (= 63) \\ 39^2 + 20^2 + 4^2 = 38^2 + 22^2 + 3^2 \ (= 1937) \end{cases}$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} 36 + 25 + 2 = 32 + 30 + 1 \ (= 63) \\ 36^2 + 25^2 + 2^2 = 32^2 + 30^2 + 1^2 \ (= 1925). \end{cases}$$

$$1941^2 = 3.767.481$$

$$= 1939^2 + 88^2 + 4^2 = 1939^2 + 68^2 + 56^2$$

$$= 1933^2 + 164^2 + 64^2 = 1933^2 + 176^2 + 4^2$$

$$= 1931^2 + 176^2 + 88^2 = 1912^2 + 316^2 + 109^2$$

$$= 1907^2 + 316^2 + 176^2$$

$$= 1904^2 + 371^2 + 68^2 = 1904^2 + 373^2 + 56^2$$

$$= 1901^2 + 392^2 + 4^2$$

$$= 1816^2 + 640^2 + 245^2 = 1796^2 + 524^2 + 517^2$$

$$= 1784^2 + 659^2 + 388^2 = 1660^2 + 955^2 + 316^2$$

$$= 1595^2 + 1084^2 + 220^2 = 1544^2 + 1109^2 + 392^2$$

$$= 1432^2 + 1261^2 + 356^2 = 1429^2 + 1312^2 + 64^2$$

$$1421^2 + 1312^2 + 164^2 = \cdot$$

$$1941 = (2.22)^2 + 2.2 + \frac{2}{2} = (44)^{\sqrt{4}} + 4 + \frac{4}{4}$$

$$= \overline{333}\,(3 + 3) - 3^3 - 3^3 - 3$$

A. GLODEN
(LUXEMBOURG)

10. — *Ecuația* $x^3 + y^3 + z^3 = t\,x\,y\,z$ *în întregi.*

Această ecuație a făcut obiectul a o mulțime de cercetări, ceiace a făcut să fie propusă din nou în *„Gazeta Matematică"*, sub No. 4062. Ultimele cercetări — după cunoștința noastră — aparțin d-lui Prof. *G. Iuga*. Toate acestea, însă, se referă la soluții pentru valori particulare ale lui t, etc.

În cele de mai jos, voi da câteva rezultate generale, în speranța că cercetările vor fi duse până la capăt de cineva.

Ecuația de mai sus se poate scrie

$$(1) \qquad (x + y)(x^2 - x\,y + y^2) = z\,(t\,x\,y - z^2).$$

Fie a c. m. m. d. c al numerelor $x + y$ și z, avem

$$(2) \qquad x + y = a\,b, \qquad z = a\,c,$$

așa că (1) devine

$$b\,(x^2 - x\,y + y^2) = c\,(t\,x\,y - z^2);$$

de oarece b și c sunt prime între ele, egalitatea aceasta se desface în

$$(3) \qquad x^2 - x\,y + y^2 \quad c\,d, \qquad t\,x\,y - z^2 = b\,d$$

Presupunem că x, y, z sunt prime între ele două câte două, altfel ecuația inițială se poate simplifica cu divizorul lor comun; rezultă că primul membru al primei ecuații (3), deci și factorii c și d, sunt numere *impare*.

Acestea precizate, prima ecuație (3) se mai poate scrie

$$(4) \qquad (2\,x - y)^2 + 3\,y^2 = 4\,c\,d;$$

primul membru fiind de forma $u^2 + 3\,v^2$, după o teoremă a lui *Lagrange* (Oeuvres, I, 3, pag. 708), orice divizor impar al său, deci c și d, este de aceiaș formă.

Punând deci

$$(5) \qquad c = \alpha^2 + 3\,\beta^2, \qquad d = \gamma^2 + 3\,\delta^2,$$

(4) devine

$$(2x-y)^2+3y^2=[\alpha\gamma+3\varepsilon\beta\delta)+3\varepsilon'(\alpha\delta-3\varepsilon\beta\gamma)]^2$$
$$+3[(\alpha\delta-3\varepsilon\beta\gamma)+\varepsilon'(\alpha\gamma+3\varepsilon\beta\gamma)]^2,$$

unde $\varepsilon,\ \varepsilon'=\pm 1$, deducem

$$(6)\quad \begin{cases} 2x=(1-\varepsilon')(\alpha\gamma+3\varepsilon\beta\delta)+(1+3\varepsilon')(\alpha\delta-3\varepsilon\beta\gamma), \\ y=(\alpha\delta-3\varepsilon\beta\gamma)-\varepsilon'(\alpha\gamma+3\varepsilon\beta\delta), \qquad \varepsilon,\varepsilon'=\pm 1, \end{cases}$$

care sunt formele *necesare* ale numerelor x şi y în cazul *general*.

Problema se reduce acum la rezolvarea în întregi a celei de a doua ecuaţii (3), ţinând seama de (2), (5) şi (6).

M. GHERMANESCU

---

11. — *Ein diophantisches Problem.*

Die Reihe

$$A_1^n+A_2^n+\cdots+A_9^n=B_1^n+B_2^n+\cdots B_9^n$$

hat für $n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$ die Lösung

$$A_1=-6x^2+26xy-13y^2,$$
$$A_2=-2x^2-12xy+17y^2,$$
$$A_3=2x^2+28xy-19y^2,$$
$$A_4=18x^2-34xy+11y^2,$$
$$A_5=26x^2-16xy+3y^2,$$
$$A_6=34x^2-52xy+13y^2,$$
$$A_7=38x^2-18xy-11y^2,$$
$$A_8=42x^2-56xy+19y^2,$$
$$A_9=46x^2-38xy-3y^2;$$

$$B_1=-6x^2+4xy+y^2,$$
$$B_2=-2x^2+38xy-23y^2,$$
$$B_3=2x^2+7y^2,$$
$$B_4=18x^2-40xy+23y^2,$$
$$B_5=26x^2-10xy-9y^2,$$
$$B_6=34x^2-30xy-y^2,$$
$$B_7=38x^2-62xy+17y^2,$$
$$B_8=42x^2-28xy-7y^2,$$
$$B_9=46x^2-44xx+9y^2,$$

$x=3,\ y=1$ gibt

$$11^n+41^n+71^n+83^n+163^n+189^n+229^n+$$
$$277^n+297^n=25^n+37^n+65^n+73^n+143^n+$$
$$195^n+215^n+287^n+291^n;\quad n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9;$$

$s_1=1361,\ s_3=71\,452\,961,\ s_5=4\,933\,547\,222\,801,$
$s_7=373\,705\,333\,506\,198\,641,$
$s_9=29\,702\,856\,477\,661\,187\,269\,841;$

$x=3,\ y=2$ gibt

$$1^n+13^n+25^n+55^n+75^n+87^n+95^n=$$
$$7^n+11^n+19^n+61^n+69^n+91^n+93^n,$$
$$n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9;$$

$s_1=351,\ s_3=2\,121\,951,\ s_5=15\,608\,486\,751,$
$s_7=122\,436\,199\,267\,551,$
$s_9=995\,487\,442\,132\,685\,151.$

JOHANNES MAHRENHOLZ
(COTTBUS)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVII, No. 9, Mai 1942 Rezultatul Concursului „Gazetei Matematice" din anul 1912, de *Gh. Th. Gheorghiu*. Despre parabola cubică, de *D. Barbilian*. Calculul vectorial (urmare), de Dr Ing. *Plautius Andronescu*. Raport asupra premiului de algebră, de *V. Alaci, Th. Angheluţă* şi *Al Bunescu*. Note matematice. Probleme rezolvate şi propuse.

2. † *Gheorghe Bratu*. Curs de Astronomie.

Colegii regretatului şi distinsului profesor *Gh Bratu*, în semn de deosebită afecţiune şi pentru a-i eterniza memoria, au scos sub auspiciile Universităţii *„Regele Ferdinand I din Cluj"* cursul atât de profund, cuprinzător şi util studenţilor, predat de marele profesor.

3. *Gh. Th. Gheorghiu*. Curs de Algebră şi Trigonometrie. Cuprinde lecţiile interesante, presărate de numeroase aplicaţii, făcute studenţilor anului I de la Politechnica din Timişoara.

4. *I. G. Murgulescu* und *Maria Alexa* Die Verwendung der Hexamminkolalt III-salze in der quantitativen Analyse. (Sonderabdruck aus „Zeitschrift für analytische Chemie" Bd. 123, H. 9 u. 10).

5 *I. G. Murgulescu* und *Vasile Alexa*. Die Verwendung der Hexamminkolalt III-salze in der quantitativen Analyse. (Sonderabdruck aus „Zeitschrift für analytische Chemie" Bd. 123, H. 9 u. 10)

6 *I. G Murgulescu* und *C. Drăgulescu*. Die Verwendung der Hexamminkolalt III-salze in der quantitativen Analyse. (Sonderabdruck aus „Zeitschrift für analytische Chemie" Bd. 123, H. 9 u. 10).

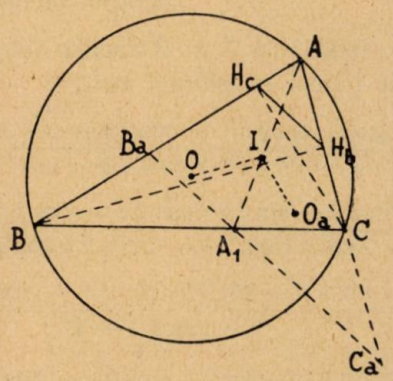
7. Ing. *C. I. Călniceanu*. Cotarea Desemnelor, Toleranţe şi ajustaj. (Tipografia Românească, 1942).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1174. — *Prin picioarele bisectoarelor interioare ale triunghiului de referință, se duc paralele laturilor respective ale triunghiului ortic. Centrele cercurilor circumscrise celor trei triunghiuri formate din câte una din paralele construite și laturile triunghiului de referință, alăturate bisectoarei corespunzătoare, împreună cu centrul cercului circumscris triunghiului de referință, sunt pe un cerc concentric cu cercul înscris triunghiului de referință.*

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

Triunghiul ortic $H_a H_b H_c$ al unui triunghiu ABC are ca vârfuri picioarele H_a, H_b, H_c ale înălțimilor triunghiului. Se știe că laturile triunghiului ortic sunt antiparalele cu laturile corespunzătoare ale triunghiului, de ex., $H_c H_b$ face cu AB un unghiu egal cu cel făcut de BC cu AC; sau, simetrica lui $H_c H_b$ față de bisectoarea unghiului BAC este paralelă cu BC. Deci, paralela $B_a C_a$ la $H_a H_b$ prin piciorul A_1 al bisectoarei interioare AA_1 a unghiului A, este simetrica lui BC față de bisectoarea AA_1. Prin urmare, triunghiul AB_aC_a format de această paralelă cu AB și AC este simetricul lui ABC față de bisectoarea AA_1, și egal cu triunghiul ABC. Centrele O și O_a circumscrise acestor triunghiuri sunt simetrice față de bisectoarea AA_1 și cum centrul I al cercului înscris lui ABC este pe această bisectoare, urmează că $IO = IO_a$.



Deci centrele O_a, O_b, O_c ale triunghiurilor analoage cu AB_aC_a, împreună cu centrul O al cercului ABC, sunt pe un cerc cu centrul I și raza IO. Cercul înscris triunghiului ABC este înscris în toate triunghiurile considerate.

Au rezolvat problema D-nii *Mehedinți Dumitru. Mihăileanu N. N., Procopiescu Mihai, Săndulescu Ion.*

D-nii *Mehedinți D.* și *Procopiescu M.* au observat că centrele triunghiurilor AB_aC_a, ... sunt simetricele centrului O față de bisectoare și s'au servit de proprietatea că un punct O și simetricele sale în raport cu trei drepte concurente în I (bisectoarele), sunt pe un cerc cu centrul în punctul I de întâlnire al dreptelor.

D-l *Mihăileanu N. N.* observă că un element punctual oarecare e conciclic (pe același cerc) cu corespunzătoarele lui în cele trei triunghiuri, cu centrul în centrul I al cercului înscris. Mai mult, dacă se rotește un triunghiu, succesiv în jurul cevienelor unui punct (trei drepte concurente în acel punct), ca axe, un punct oarecare din planul triunghiului se află pe cercul analoagelor lui în triunghiurile rotite, cu centrul în centrul de rotație.

N. A.

Problema 1325. — *În ce triunghiuri avem relația*

$$I_b^2 = I_c^2 + I_a^2,$$

I_a, I_b, I_c fiind porțiunile de înălțimi cuprinse între vârf și ortocentru ?

S LT. MARIN P TICA-GALL

Soluție. Ținând seamă de formulele cunoscute

$$I_a = 2R\cos A, \quad I_b = 2R\cos B, \quad I_c = 2R\cos C,$$

(Compléments de Trigonométrie par „F. G M.", p 182), relația dată devine

$$\cos^2 B = \cos^2 C + \cos^2 A,$$

sau

$$\cos^2 A = (\cos^2 B - \cos^2 C) =$$

$$(\cos B + \cos C)(\cos B - \cos C)$$

Transformând în produse factorii din membrul al 2-lea, avem

$$\cos^2 A = 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \cdot 2\sin\frac{C+B}{2}\sin\frac{C-B}{2},$$

sau

$$\cos^2 A = \sin(B+C)\sin(C-B).$$

Cum primul membru este pozitiv, precum și factorul $\sin(B+C)$, urmează că trebuie să avem

$$C \geq B.$$

1°. Dacă $C = B$, atunci

$$\cos A = 0, \quad \text{deci} \quad A = 90^0$$

și avem ca soluție *triunghiul dreptunghic isoscel.*

2°. Dacă $C > B$, atunci luând

$$C - B = \alpha,$$

unghiurile A, B, C trebuie să satisfacă sistemul

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos^2 A = \sin A \sin \alpha \\ A + B + C = 180^0 \\ C - B = \alpha, \qquad (\alpha > 0). \end{cases}$$

Prin urmare, triunghiurile în care unghiurile A, B, C satisfac sistemul (1), răspund şi ele problemei.

Exemplu. Pentru $\alpha = 30^0$, sistemul (1) devine

$$(2)\qquad \begin{cases} 2\cos^2 A = \sin A \\ C - B = 30^0 \\ C + B = 180^0 - A. \end{cases}$$

Cum prima ecuaţie se mai poate scri

$$2\sin^2 A + \sin A - 2 = 0,$$

luând rădăcina convenabilă, avem

$$\sin A = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \simeq \frac{3{,}12}{4} = 0{,}78.$$

Căutând în tabela liniilor trigonometrice naturale, găsim

$$A \simeq 51^0,\ 30',$$

atunci din (2) rezultă încă

$$C = 79^0,\ 15', \qquad B = 49^0,\ 15'.$$

Au dat numai soluţia 1°, autorul problemei, d-ra *Manolache Elena* (Cluj) şi d-nii: *Amăreşteanu F. Marcel* (Craiova), *Apostol Radu* (lic. Milit. N Filipescu), *Jidanu I. C.* (Şc. Polit. Timişoara), *Murgu Marţian* (Şc. Polit., Timişoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila) şi *Popa Nicolae* (lic. Beiuş).

Problema 1646 şi 1880. — *D că într'un triunghiu oarecare* A B C, *unim punctele unde cercurile exînscrise ating laturile, se formează triunghiul* A′ B′ C′. *Dacă* a, b, c *sunt laturile şi* h_a, h_b, h_c *înălţimile triunghiului* A B C, *iar* a', b', c' *laturile triunghiului* A′ B′ C′ *să se arate că avem:*

$$a' = \sqrt{a^2 - h_b h_c},\quad b' = \sqrt{b^2 - h_c h_a},\quad c' = \sqrt{c^2 - h_a h_b}.$$

SUB LT. ADRIAN POPESCU

Soluţie. Construind triunghiurile A B C şi A′ B′ C′, observăm că în triunghiul C A′ B′, avem

$$C A' = p - b, \qquad C B' = p - a,$$

(Geometria triunghiului de *„Lalescu"*, p. 18), şi atunci putem scri

$$c'^2 = (p-a)^2 + (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b)\cos C,$$

sau

$$c'^2 = [(p-a)+(p-b)]^2 - 2(p-a)(p-b)(1+\cos C).$$

Această relaţie se mai poate scri încă

$$(1)\qquad c'^2 = c^2 - 4(p-a)(p-b)\cos^2\frac{C}{2}.$$

Cum cunoaştem relaţiile

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}, \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

egalitatea (1) devine succesiv

$$c'^2 = c^2 - \frac{4}{ab}\cdot p(p-a)p-b)(p-c) = c^2 - \frac{2S}{a}\cdot\frac{2S}{b},$$

sau

$$c'^2 = c^2 - h_a h_b,$$

de unde

$$c' = \sqrt{c^2 - h_a h_b}.$$

Analog găsim şi celelalte două relaţii cerute.

Soluţii date de d-nii: *Gligor N. Ioan* (Şc. Of. Art, Craiova), Dr. *A Gloden* (Luxemburg), *Stoenescu D. Mirel* (Colegiul Militar, N. Filipescu) şi *Tilică Ştefan* (S-Lt).

Problema 1871. — *Să se stabilească egalitatea*

$$\frac{\sin 2(a+b)}{\cos 2(a-b)} = \frac{(\sin 2a - \sin 2b + \cos 2b - \cos 2a)^2}{(\sin 2a - \sin 2b)^2 + (\cos 2a - \cos 2b)^2} + \frac{2(\sin 2a - \sin 2b)(\cos 2a - \cos 2b)}{(\sin 2a - \cos 2b)^2 + (\cos 2a - \cos 2b)^2 - 2} - 1.$$

BENONE GEORGESCU

Soluţie. Notând cu A şi B fracţiile din membrul al 2-lea, le putem transforma astfel:

$$A = \frac{(\sin 2a - \sin 2b)^2 + (\cos 2a - \cos 2b)^2}{(\sin 2a - \sin 2b)^2 + (\cos 2a - \cos 2b)^2} + \frac{2(\sin 2a - \sin 2b)(\cos 2b - \cos 2a)}{2 - 2\sin 2a \sin 2b - 2\cos 2a \cos 2b}$$

$$= 1 + \frac{(\sin 2a - \sin 2b)(\cos 2b - \cos 2a)}{1 - \cos 2(a-b)};$$

$$B = \frac{2(\sin 2a - \sin 2b)(\cos 2a - \cos 2b)}{2 - 2\sin 2a \sin 2b - 2\cos 2a \cos 2b - 2} = \frac{(\sin 2a - \sin 2b)(\cos 2a - \cos 2b)}{-\cos 2(a-b)}.$$

De aci rezultă că, membrul al 2-lea al egalității se poate scri

$$(1)\qquad A+B-1=1+\frac{(\sin 2a\ \ \sin 2b)(\cos 2b-\cos 2a)}{1-\cos 2(a-b)}-\frac{(\sin 2a-\sin 2b)(\cos 2a-\cos 2b)}{\cos 2(a-b)}-1$$

$$=\frac{(\sin 2a-\sin 2b)(\cos 2b-\cos 2a)[\cos 2(a-b)+1-\cos 2(a-b)]}{[1-\cos 2(a-b)]\cos 2(a-b)}=\frac{(\sin 2a-\sin 2b)(\cos 2b-\cos 2a)}{[1-\cos 2(a-b)]\cos 2(a-b)}.$$

Cum însă

$$(\sin 2a-\sin 2b)(\cos 2b-\cos 2a)=$$

$$\sin 2a\cos 2b-\sin 2a\cos 2a-\sin 2b\cos 2b$$

$$+\sin 2b\cos 2a=\sin 2(a+b)-\frac{\sin 4a+\sin 4b}{2}$$

$$=\sin 2(a+b)-\sin 2(a+b)\cos 2(a-b)$$

$$=\sin 2(a+b)[1-\cos 2(a-b)],$$

egalitatea (1) se mai poate scri:

$$A+B-1=\frac{\sin 2(a+b)[1-\cos 2(a-b)]}{[1-\cos 2(a-b)]\cos 2(a-b)}=$$

$$\frac{\sin 2(a+b)}{\cos 2(a-b)},$$

tocmai egalitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Aldea N. Mircea* (Buzău), *Baconyi C.* (Polit., Timișoara), Dr *A. Gloden* (Luxemburg), *Simon Ș. Petru* (lic. Arad), și *Vasiliu Gh. D-tru* (lic. Militar, Timișoara).

Problema 1875. — *Se cer patratele de șase cifre, astfel ca numărul format de ultimele trei cifre să reprezinte rădăcina sa patrată.*

C. Bakonyi

Soluție. Fie N^2 patratul cerut. Conform enunțului avem

$$N^2=abcdef=10^3.abc+def$$

$$N=def.$$

Scăzând a 2-a relație din prima, avem

$$(1)\qquad N(N-1)=10^3.abc=8\times 125.abc.$$

Factorii N, N — 1 neputând fi simultan divizibili prin 5, rezultă că N sau N — 1 este divizibil prin 125.

Pe de altă parte fiind că

$$100000\leq N^2.<1000000,$$

rezultă

$$317<N\leq 999$$

și prin urmare, ținând seamă de cele spuse mai înainte, deducem că N sau N — 1 poate fi

$$(2)\qquad 375,\ 500,\ 625,\ 750,\ 875.$$

Dacă pentru N luăm unul din aceste numere, pentru N — 1 trebuie să luăm respectiv

$$374,\ 499,\ 624,\ 749,\ 874$$

și cum N(N — 1) trebuie să se dividă și prin 8, cum rezultă din (1), nu putem alege pentru N, din șirul (2), de cât numărul **625**.

Dacă însă pentru N — 1 luăm numerile din șirul (2), atunci N trebuie să fie respectiv

$$(3)\qquad 376,\ 501,\ 626,\ 751,\ 876$$

și cum N(N — 1) este divisibil și prin 8, rezultă că din șirul (3) nu putem lua pentru N de cât numărul **376**.

Avem astfel ca soluții pentru problemă,

$$376^2=141376$$

$$625^2=390625.$$

Soluții date de d-nii: *Popescu Adrian* (S-Lt.), *Radoslav Gh Ion* (Polit., București) și *Tilica Ștefan* (S-Lt).

Au găsit câte o soluție, fără nici o motivare, d-nii: *Cârlan S. Nicolae* (lic. Tecuci). *Ionescu F. Petre* (Colegiul, Craiova) și *Țarălungă Savel* (lic. Internat, Iași).

Problema 1888. — *Notațiile fiind cele obicinuite, să se arate că în orice triunghiu există relația*

$$\Sigma\operatorname{cotg}^n\frac{A}{2}=p^n\frac{\Sigma r_a^n r_b^n}{a^n b^n c^n\cos^n\frac{A}{2}\cos^n\frac{B}{2}\cos^n\frac{C}{2}}.$$

Ionel I. Stamate

Soluție. Din relația cunoscută

$$r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

deducem

$$\operatorname{cotg}^n \frac{A}{2} = \frac{p^n}{r_a^n} = \frac{p^n r_b^n r_c^n}{(r_a r_b r_c)^n},$$

deci:

$$(1) \qquad \Sigma \operatorname{cotg}^n \frac{A}{2} = \frac{p^n}{(r_a r_b r_c)^n} \Sigma r_a^n r_b^n.$$

Cum se cunoaşte încă relaţia

$$r_a r_b r_c = a b c \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Compléments de Trigonométrie" par F. G. M., (p. 210, relaţia devine

$$\Sigma \operatorname{cotg}^n \frac{A}{2} = p^n \frac{\Sigma r_a^n r_b^n}{a^n b^n c^n \cos^n \frac{A}{2} \cos^n \frac{B}{2} \cos^n \frac{C}{2}},$$

tocmai relaţia cerută.

Au dat soluţii, d-nii: *Aldea V. Mircea* (Buzău), *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Cristea I. N.* (Blaj), *Facso I. Gheorghe* (lic. Loga, Timişoara), *Florescu I. Ghenade* (Institutul Român, Sofia), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Gloden A.* (Luxemburg), *Ionescu F. Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Lupescu Corneliu* (Sublt, Roman). *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu I. Adrian* (Polit, Timişoara), *Simon Ş. Petru* (lic. Arad), *Tica P. Marin-Gall* (Locot), *Tilică Ştefan* (Slt, Mehedinţi) şi *Vasiliu Gh. D-tru* (lic Milit., Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

2042. — Să se găsească patrate perfecte de forma $AABB$, unde A şi B sunt numere întregi de m cifre.

Să se arate că nu există cuburi perfecte de aceiaşi formă, dacă $10^m + 1$ este număr prim.

M. GHERMANESCU

2043. — Să se găsească toate numerile de forma $abcde$ astfel ca

$$a + b = c, \qquad a + c = d, \qquad a + d = e,$$

cifrele fiind distincte între ele.

M. MANOLACHE

2044. — Să se rezolve sistemul:

$$(x+a)(y+a)(z+a) = (x+b)(y+b)(z+b) = (x+c)(y+c)(z+c) = k.$$

Discuţie; generalizare.

EUGEN WEGENER

2045. — Să se rezolve ecuaţia

$$x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4x + 16 = 0$$

ştiind că admite ca rădăcină pe $\sqrt[3]{3} + 1$.

IOAN I. LUCA

2046. — Să se studieze funcţia *pseudo-omogenă* [1] definită de ecuaţia

$$4y^6 - 9x^4 y^4 - 2x^8 y^2 + x^{12} = 0.$$

Generalizare.

I. V. MATIES

2047. — Un triunghiu dreptunghic isoscel are vârful mobil A pe un cerc O, iar cateta BC mobilă pe un diametru fix al cercului

Se cere locul unui punct care împarte ipotenuza AC într'un raport dat.

G-L GH. BUICLIU

2048. — O navă se găseşte într'un punct A şi merge spre E cu o viteză de 10 Mile. Pe acelaş meridian şi la S de A, la o distanţă de 50 Mile, se găseşte într'un punct B o altă navă, care dispune de o viteză de 20 Mile. Se cere:

1°. Drumul navei B ca să întâlnească nava din A în cel mai scurt timp.

2°. Timpul după care se vor întâlni.

CPT. C. V. COSTACHESCU

2049. — Se cere configuraţia, care în *coordonate ortorombice* are ecuaţia

$$r = a \operatorname{sp}\theta \operatorname{cp}\theta, \qquad (a > 0).$$

V. ALACI

[1]) A se vedea vol. III, p. 3.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Cristea D Viorel (1927, 1931, 1947, 1956, 1987, 1988, 2006). *Enăchescu I.* (1405, 1494, 1516, 1574, 1924, 1931, 1956, 1965, 1980, 1993, 2008), *Gâţă Gh.* (1858, 1931, 1946, 1970) *Iacob Şt. Eugen* (N., P) *Kinsky Ioan* (1795, 1927, 1947, 1955, 1975, 1979, 1982, 1983, 1997, 2006, 2029). *Luca L. Laurenţiu* (1947, 1956, 2006, 2018, 2020) *Lupescu Corneliu* (2034, 2036, 2038, 2041). *Manolache Mircea* (1924, 1927, 1970, 1975, 1987, 1988, 1994, 1998, 2006, 2007, 2008, 2013, 2014, 2015, 2017). *Mahrenholz Johannes* (N., 1996, 1998, 1999, 2001, 2004, 2007, 2013, 2014). *Opran C. Constantin* (2006, 2013, 2014, 2023). *Oprea D. Gheorghe* (1979), *Pop Emil* (1835, 1836, 1887). *Popescu I. Adrian* (P., 1914. 1934, 1969). *Tarczewski Antoni* (2006). *Turicu T. Octavian* (1927, 1947, 1956, 2006, 2018). *Ţifescu Gh. Bogdan* (1931, 1956, 1962), *Wegener Eugen* (P., 1939, 1940, 1948, 1949, 1955, 1979, 1984, 1985, 1988, 1901, 1998, 2005, 2013, 2014, 2017, 2021, 2023, 2028, 2029, 2038).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XX, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XX, cu preţul de lei 200 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXII. IULIE 1942 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ "ASTRA" SIBIIU

CUPRINSUL

1. **V. ALACI:** UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE" (URMARE).

2. **EUGEN VISA:** ASUPRA UNOR ECUATII DIOFANTIENE.

3. NOTE MATEMATICE: 12, 13, 14.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 1125, 1577, 1866, 1867, 1892.

6. PROBLEME PROPUSE: 2050 — 2057.

7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Din cauza scumpirei hârtiei şi a tiparului am fost obligaţi a mări costul abonamentului pentru anul 1942 la 180 (una sută optzeci) lei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — No. 5 TIMISOARA, IULIE 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE“

DE

V. ALACI.

(urmare)

Curba dublă a lui Rolle.

38. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică*

(97) $$r = a(1 + \operatorname{cotg}\theta)^2, \qquad (a > 0).$$

Prima soluție. Configurația (97) este simetrică în raport cu origina O, într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$, fiindcă înlocuind θ prin $\pi+\theta$, r rămâne același.

Vom construi dar configurația (97) întâi în cadranele I, IV și apoi o vom întregi cu simetricele părților aflate față de origina O.

În acest scop efectuăm următoarea construcție prin puncte:

Luăm pe $x'O$, Oy *segmentele* $AO = OB = a$, *prin* B *ducem o paralelă* CB ($CB = a$) *la* $x'x$ *și din* O *ducem — în cadranul I, sau IV — o semi-dreaptă variabilă ce întâlnește pe* CB *în* D. *Așezăm pe* Oy *segmentul* $OE = CD$ *și din* E *ducem o perpendiculară pe* AE, *care întâlnește pe* Ox *în* F.

Intersecția I *a lui* OD *cu perpendiculara în* F *pe* Ox, *aparține configurației* (97), (fig. 30).

În adevăr, notând

$$OF = r, \qquad \sphericalangle xOI = \theta$$

coordonatele ortorombice ale lui I, observăm pe figură că,

$$OE = CD = CB + BD = a + a\operatorname{cotg}\theta,$$

iar din triunghiul dreptunghic AEF, avem

$$\overline{OE}^2 = \overline{AO} \cdot \overline{OF},$$

sau

$$a^2(1 + \operatorname{cotg}\theta)^2 = ar,$$

relație care simplificată cu a ne dă tocmai ecuația 97.

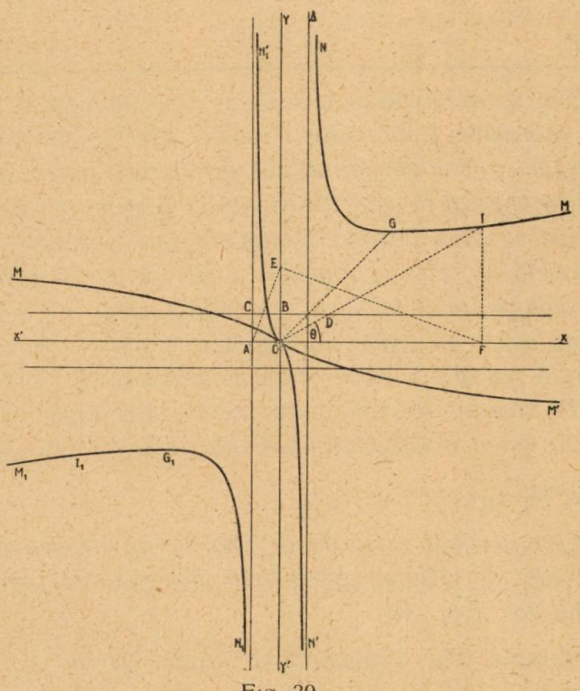


Fig. 30.

Punctul I a fost astfel bine determinat.

Variind θ în intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, obținem analog lui I, alte puncte ale configurației (97).

Pentru a vedea clar și forma configurației (97) din cadranele I, IV, vom forma un tablou de variație, observând în prealabil că,

(98) $$r' = -\frac{2a(1 + \operatorname{cotg}\theta)}{\sin^2\theta}$$

și că *ordonatele* punctelor I satisfac relația

(99) $$y = r\operatorname{tg}\theta = a(1 + \operatorname{cotg}\theta)^2 \operatorname{tg}\theta,$$

de unde rezultă

$$(100)\quad y' = a\left[\frac{-2(1+\operatorname{cotg}\theta)\operatorname{tg}\theta}{\sin^2\theta} + \frac{(1+\operatorname{cotg}\theta)^2}{\cos^2\theta}\right]$$
$$= a\sin^2\theta(\operatorname{tg}^2\theta - 1).$$

Cu ajutorul ecuației (97) și a relațiilor (98), (99) și (100), putem construi acum următorul tablou de variație:

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	∞	$4a$	a		a	0	∞
r'	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
y	∞	$4a$	∞		$-\infty$	0	$-\infty$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$

Din acest tablou deducem că: *Configurația* (97), *în cadranele* I, IV, *este formată dintr'o ramură* M G N *ce vine dinspre infinit din dreapta axei* $x'x$, *coboară până în punctul de minim* G ($y=4a$, $\theta=45^0$) *și apoi se ridică tinzând asimptotic spre o dreaptă* Δ *paralelă cu* $y'y$ *la distanța* a *de ea, trece apoi la stânga lui* Δ *la* $-\infty$, *se ridică spre origină, unde avem un punct de inapoiere și apoi continuă o altă ramură a cărei ordonate descresc la* $-\infty$.

Pe ramura M G *este un punct inflexiune, iar în* O *avem o tangentă înclinată față de* Ox *de unghiul* $\frac{7\pi}{4}$.

Complectând ramurile de mai sus cu simetricele lor față de origine, obținem în intregime configurația (97), (fig. 30).

Soluția 2-a. Transpunând ecuația (97) în *coordonate carteziene*, în virtutea formulelor de transformare (9'), ea devine pentru cadranele I, IV,

$$(97')\qquad x y^2 = a(x+y)^2.$$

Dar aceasta este tocmai *curba lui Rolle* [1], care există numai în cadranele I, IV și care se găsește studiată pe cale algebrică, dar pentru care noi am dat în prima soluție o construcție prin puncte.

Configurația (97) fiind formată din *curba lui Rolle* și simetrica ei față de origina O, cum am văzut în prima soluție, am numit-o pe drept **curba dublă a lui Rolle.**

[1]) Dr. *G. Teixeira:* Vol. I, pp. 115—116.

Observare. Punctul dublu $x=y=0$ al curbei (97'), nu aparține configurației (97).

Curba mixtă dublă.

39. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică,*

$$(101)\qquad r - b = a\operatorname{cotg}^2\theta, \qquad (a>0,\ b>0)$$

Prima soluție. Configurația (101) este simetrică față de axe și origina lor, într'un sistem de axe rectangulare, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi+\theta$, r rămâne același.

Vom construi dar configurația (101) numai în primul cadran și o vom întregi cu simetricele ei față de axe și origina lor.

Pentru aceasta efectuăm următoarea construcție prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *ducem prin punctul* B *al axei* Ox (O B $= b$) *o dreaptă* Δ *paralelă cu* $y'y$ *și luăm pe* $x'x$, *în stânga lui* B, *segmentul* A B $= a$. *Prin* O, *trasăm în primul cadran o semi-dreaptă variabilă* Oα ($\sphericalangle\, x\,$O$\,\alpha = \theta$), *iar prin* A *ducem o semi-dreaptă care întâlnește în* C *pe* Δ, *astfel ca*

$$\sphericalangle\, \text{B A C} = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

În C *ridicăm o perpendiculară pe* A C, *care întâlnește în* D *axa* $x'x$.

Intersecția I *a lui* Oα *cu perpendiculara în* D *pe* $x'x$, *aparține configurației* (101), (fig. 31).

În adevăr, însemnând

$$\text{O D} = r, \qquad \sphericalangle\, x\,\text{O I} = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului I, observăm că din triunghiurile dreptunghice A B C și A C D, avem

$$\text{B C} = a\operatorname{cotg}\theta,$$

$$\overline{\text{B C}}^2 = \overline{\text{A B}} \cdot \overline{\text{B D}} = a(r-b),$$

deci

$$r - b = a\operatorname{cotg}^2\theta,$$

tocmai ecuația (101). Punctul I a fost astfel bine determinat.

Variind pe θ în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, avem alte puncte analoage lui I.

Pentru a vedea clar și forma configurației (101)

din primul cadran, vom forma un tablou de variaţie, observând în prealabil că,

$$r' = -\frac{2a\operatorname{cotg}\theta}{\sin^2\theta} \tag{102}$$

şi că *ordonatele* punctelor I satisfac relaţia

$$y = r\operatorname{tg}\theta = b\operatorname{tg}\theta + a\operatorname{cotg}\theta, \tag{103}$$

de unde rezultă,

$$y' = \sin^2\theta\,(b\operatorname{tg}^2\theta - a). \tag{104}$$

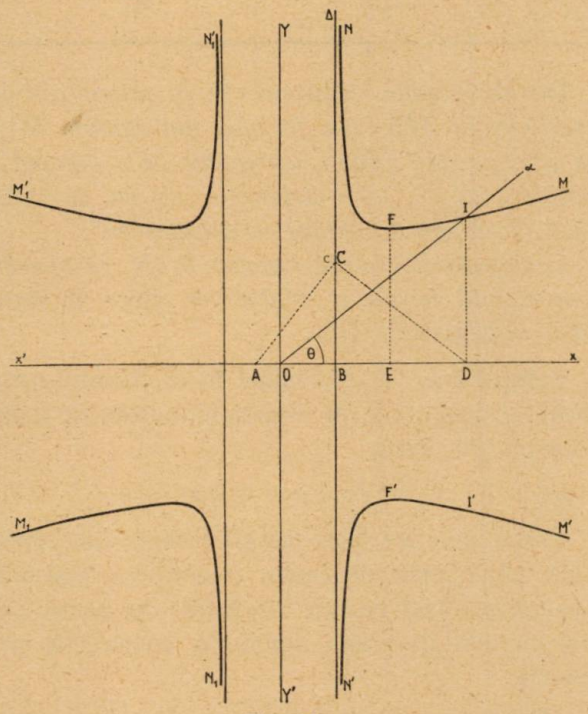


Fig. 31.

Cu ajutorul ecuaţiei (101) şi a relaţiilor (102), (103) şi (104), putem construi acum următorul tablou de variaţie pentru primul cadran, unde am presupus $a > b$:

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\pi}{2}$
r	∞	$a+b$	$2b$	b
r'		—	—	—
y	∞	$a+b$	$2\sqrt{ab}$	∞
y'	0	—	0	+

Din acest tablou deducem că: *În primul cadran, configuraţia* (101) *este formată dintr'o ramură* M F N *ce vine dinspre infinit din dreapta axei* $x'x$, *coboară până în punctul de minim* F $(y=2\sqrt{ab},\ r=2b)$ *şi apoi se ridică şi merge asimptotic spre dreapta* Δ, *pe ramura* M F *existând un punct de inflexiune.*

Complectând ramura M F N *cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor, avem întreaga configuraţie* (101).

Soluţia 2-a. Transpunând ecuaţia (102) în *coordonate carteziene* şi numai pentru cadranele I şi IV, în virtutea formulelor de transformare (9'), obţinem

$$xy^2 = ax^2 + by^2. \tag{101'}$$

Dar aceasta este tocmai ecuaţia *cubicei mixte* [1], care există numai în cadranele I, IV şi care se găseşte studiată pe cale algebrică, dar pentru care noi am dat în prima soluţie o construcţie prin puncte.

Configuraţia (101) fiind formată din *cubică mixtă* (101') şi simetrica ei faţă de axa $y'y$, am fost îndreptăţiţi a o numi **cubica mixtă dublă.**

Observare. Punctul dublu $x = y = 0$ al cubicei (101'), nu aparţine configuraţiei (101).

Configuraţii de gradul al 2-lea în r.

Curba cruciformă.

40. **Problemă.** *Se cere configuraţia de ecuaţie ortorombică*

$$r^2 = a^2 + b^2\operatorname{cotg}^2\theta. \tag{105}$$

Prima soluţie. Configuraţia (105) este simetrică faţă de axe şi origina lor într'un sistem de axe rectangulare, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi+\theta$, r rămâne acelaşi.

Vom construi dar configuraţia (105) întâi în primul cadran şi apoi o vom întregi cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor.

În acest scop efectuăm următoarea construcţie prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare cu origina în O, *ducem din* O *în primul cadran o semidreaptă variabilă* O α ($\sphericalangle\, x\,O\,\alpha = \theta$), *măsurăm pe* O x *segmentele* O A $= a$, A B $= b$, *ducem din* B

[1] Dr. *G. Teixeira:* Vol. I, p. 118.

o perpendiculară pe Oα *până întâlnește în* C *perpendiculara în* A *pe* Ox.

Luăm apoi pe Ox *segmentul* O D *egal cu* O C.

Intersecția I *a lui* Oα *cu perpendiculara în* D *pe* Ox, *aparține configurației* (105), (fig. 32).

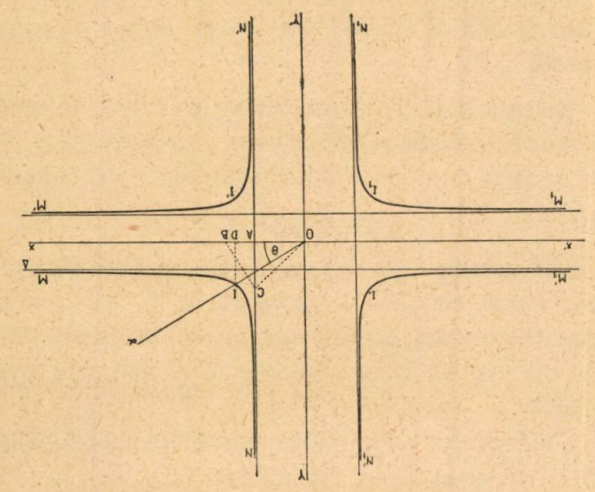


Fig. 32

În adevăr, însemnând

$$O D = r, \qquad \sphericalangle x O I = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului I, deducem din triunghiurile dreptunghice B A C și O A C, relațiile

$$A C = A B \operatorname{cotg} \widehat{B C A} = b \operatorname{cotg} \theta,$$

$$\overline{O C}^2 = \overline{O A}^2 + \overline{A C}^2,$$

sau

$$r^2 = a^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2 \theta,$$

tocmai relația (105). Punctul I a fost astfel bine determinat.

Observând că din ecuația (105) rezultă

$$r r' = - \frac{b^2 \operatorname{cotg} \theta}{\sin^2 \theta},$$

și că *ordonatele* punctului I satisfac relația

$$y^2 = r^2 \operatorname{tg}^2 \theta = b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta, \text{ deci } y y' = \frac{a^2 \operatorname{tg} \theta}{\cos^2 \theta},$$

putem forma următorul tablou de variație

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r	∞		$\sqrt{a^2 + b^2}$		a
r'		$-$		$-$	
y	b		$\sqrt{a^2 + b^2}$		∞
y'		$+$		$+$	

Din acest tablou deducem că: *În primul cadran, configurația* (105) *este formată din ramura* M I N *ce vine dinspre infinit asimptotic la o dreaptă* Δ *paralelă cu* $x' x$ *la o distanță* b *de ea, se ridică apoi și ajunge asimptotic la dreapta* A C.

Complectând această ramură M I N *cu simetricele ei față de axe și origina lor, avem în întregime configurația* (105).

Soluția 2-a. Transpunând în *coordonate carteziene* ecuația (105), în virtutea formulelor de transformare (9′), avem

$$x^2 y^2 = a y^2 + b x^2. \tag{105′}$$

Curba, care are însă această ecuație, este cunoscută sub numele de **curba cruciformă** [1], și ea se găsește studiată pe cale algebrică, dar pentru care noi am dat în prima soluție o construcție prin puncte.

Observare. Punctul dublu $x = y = 0$ al curbei (105′) nu face parte din configurația (105).

(Va urma)

---

[1] Dr. *G. Teixeira:* „Traité des courbes spéciales remarquables", Vol. I, pp. 277—278.

ASUPRA UNOR ECUAȚII DIOFANTIENE

DE

EUGEN VIȘA

Vom evidenția în cele de mai jos o metodă specială și în acelaș timp unitară, pentru rezolvarea ecuaților diofantiene de forma:

$$\prod_{i=1}^{m} x_i = x^n,$$

metodă care, dat fiind că nu am întâlnit-o în altă parte, credem că poartă pecetia noutății.

Pentru a nu îngreuna însă prea mult expunerea și pentru a rămâne într'un cadru cât mai elementar posibil, am socotit de bine să facem cunoscută această metodă pe cale concretă oarecumva, raportându-ne direct la câteva cazuri particulare simple, pe cari le vom prezenta sub formă de probleme după cum urmează:

Problema 1. *Să se rezolve ecuația diofantiană:*

$$\boxed{x\,y = z^2} \tag{1}$$

Soluție. Să descompunem numărul 2 — exponentul lui z din membrul doi al ecuației de mai sus — într'o sumă de 2 termeni întregi, — pozitivi sau nuli —.

Această descompunere, în care numărul termenilor ne este indicat de numărul factorilor produsului din membrul întâi al ecuației considerate, se poate face în următoarele două moduri:

$$2 = 1 + 1$$
$$2 = 2 + 0,$$

de unde, schimbând ordinea termenilor distincții, adică permutând acești termeni între ei, avem:

$$2 = 1 + 1;\ (m)$$
$$2 = 2 + 0;\ (p)$$
$$2 = 0 + 2;\ (q).$$

Să atașăm acum fiecăreia din egalitățile de mai sus câte un parametru, așa cum se arată în dreptul lor și să dăm pe rând acestor parametri, ca exponenți, termenii unei aceleiași coloane a sumelor din membrul doi al lor, făcând apoi de fiecare dată produsul lor.

Având două coloane, vom obține astfel două produse, cari vor fi tocmai expresiile necunoscutelor x și y ale ecuației (1) și anume;

$$\begin{cases} x = m\,p^2 \\ y = m\,q^2. \end{cases} \tag{2}$$

Ținând acum seama de aceste expresii, ecuația (1) ne va da:

$$z = m\,p\,q. \tag{3}$$

Rezultă așa dar că, soluțiile generale în numere întregi ale ecuației (1) sunt:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= m\,p^2 \\ y &= m\,q^2 \\ y &= m\,p\,q \end{aligned}} \tag{4}$$

adică cele cunoscute.

Problema 2. *Să se rezolve ecuația diofantiană:*

$$\boxed{x\,y\,z = t^3} \tag{5}$$

Soluție. Procedând analog, vom descompune numărul 3 — exponentul lui t din membrul doi al acestei ecuații — într'o sumă de tot atâția termeni întregi, fie pozitivi, fie nuli, căci tot în număr de 3 sunt și factorii produsului din primul membru al ecuației considerate.

Această descompunere e posibilă, după cum se constată, în următoarele moduri:

$$3 = 1 + 1 + 1$$
$$3 = 1 + 2 + 0$$
$$3 = 3 + 0 + 0$$

de unde, schimbând și de astă dată ordinea termenilor distincți, adică permutând acești termeni în toate modurile posibile, avem:

$$3 = 1 + 1 + 1;\ (m)$$
$$3 = 1 + 0 + 2;\ (a)$$
$$3 = 2 + 1 + 0;\ (b)$$
$$3 = 0 + 2 + 1;\ (c)$$
$$3 = 2 + 0 + 1;\ (\alpha)$$
$$3 = 1 + 2 + 0;\ (\beta)$$
$$3 = 0 + 1 + 2;\ (\gamma)$$
$$3 = 3 + 0 + 0;\ (p)$$
$$3 = 0 + 3 + 0;\ (q)$$
$$3 = 0 + 0 + 3;\ (r).$$

Să ataşăm acum egalităţilor de mai sus câte un parametru, precum se indică în dreptul lor şi să facem apoi, ca şi în cazul precedent, produsele puterilor acestor parametri de exponenţi corespunzători, egali respectiv cu termenii uneia oarecari din coloanele sumelor din membrul doi al egalităţilor menţionate.

Având trei coloane, vom obţine evident trei produse de puteri ale parametrilor consideraţi, produse cari vor fi tocmai expresiile celor trei necunoscute din primul membru al ecuaţiei (5) şi anume:

$$(6)\qquad \begin{cases} x = m\,(a\,b^2)\,(\alpha^2\,\beta)\,p^3 \\ y = m\,(b\,c^2)\,(\beta^2\,\gamma)\,q^3 \\ z = m\,(c\,a^2)\,(\gamma^2\,\alpha)\,r^3. \end{cases}$$

În virtutea acestor expresii, execuţia (5) ne va da apoi:

$$(7)\qquad t = m\,(a\,b\,c)\,(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(p\,q\,r),$$

de unde rezultă că, soluţiile generale în numere întregi ale ecuaţiei (5 sunt:

$$(8)\qquad \boxed{\begin{array}{l} x = m\,(a\,b^2)\,(\alpha^2\,\beta)\,p^3 \\ y = m\,(b\,c^2)\,(\beta^2\,\gamma)\,q^3 \\ z = m\,(c\,a^2)\,(\gamma^2\,\alpha)\,r^3 \\ t = m\,(a\,b\,c)\,(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(p\,q\,r) \end{array}}$$

ele depinzând, după cum se vede, de 10 parametri arbitrari întregi.

Problema 3. *Să se rezolve ecuaţia diofantiană:*

$$(9)\qquad \boxed{x\,y = z^3}\ .$$

Soluţie. Observăm de astă dată că, produsul din membrul întâi al ecuaţiei considerate are doi factori. Vom descompune deci numărul 3 — exponentul lui z din membrul doi al ecuaţiei de mai sus — într'o sumă de 2 termeni întregi, pozitivi sau nuli, făcând în acelaş timp şi toate permutările posibile între aceşti termeni. Obţinem astfel următoarele descompuneri:

$$3 = 1 + 2;\ (m)$$
$$3 = 2 + 1;\ (n)$$
$$3 = 3 + 0;\ (p)$$
$$3 = 0 + 3;\ (q)$$

de unde, ataşând acestor egalităţi parametrii indicaţi respectiv în dreptul lor şi făcând produsele puterilor acestor parametri de exponenţi egali, cu termenii corespunzători ai uneia sau alteia din coloanele sumelor ce figurează mai sus, obţinem expresiile necunoscutelor x şi y ale ecuatiei (9) şi anume:

$$(10)\qquad \begin{cases} x = m\,n^2\,p^3 \\ y = m^2\,n\,q^3. \end{cases}$$

Aceste expresii, introduse în (9), ne dau apoi:

$$(11)\qquad z = m\,n\,p\,q$$

aşa încât soluţiile generale în numere întregi ale ecuaţiei (9) vor fi:

$$(12)\qquad \boxed{\begin{array}{l} x = m\,n^2\,p^3 \\ y = m^2\,n\,q^3 \\ z = m\,n\,p\,q \end{array}}\ ,$$

soluţii ce depind de 4 parametri.

Problema 4. *Să se rezolve ecuaţia diofantiană:*

$$(13)\qquad \boxed{x\,y\,z = t^2}$$

Soluţie. În această ecuaţie, necunoscuta din membrul doi figurează la patrat, deci la puterea de exponent 2; iar necunoscutele din primul membru, intră sub forma unui produs de 3 factori.

Vom descompune deci numărul 2 într'o sumă de 3 termeni pozitivi, întregi sau nuli, aceste descompuneri considerându-se distincte, dacă diferă fie prin natura, fie prin ordinea termenilor.

După cum se constată, sunt posibile următoarele descompuneri:

$$2 = 1 + 0 + 1;\ (e)$$
$$2 = 1 + 1 + 0;\ (m)$$
$$2 = 0 + 1 + 1;\ (n)$$
$$2 = 0 + 2 + 0;\ (p)$$
$$2 = 0 + 0 + 2;\ (q)$$
$$2 = 2 + 0 + 0;\ (r),$$

cărora ataşându-le parametri indicaţi în dreptul lor şi procedând analog cazurilor considerate anterior, găsim că necunoscutele x, y, z au expresiile:

$$(14)\qquad \begin{cases} x = l\,m\,r^2 \\ y = m\,n\,p^2 \\ z = n\,l\,q^2. \end{cases}$$

Ţinând seama acum de aceste expresii, ecuaţia (13) ne dă:

$$t = l\,m\,n\,p\,q\,r, \tag{15}$$

aşa încât urmează că soluţiile generale în numere întregi ale ecuaţiei (13) sunt:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= l\,m\,r^2 \\ y &= m\,n\,p^2 \\ z &= n\,l\,q^2 \\ t &= l\,m\,n\,p\,q\,r \end{aligned}}, \tag{16}$$

ele depinzând, precum se vede, de şase parametri întregi arbitrari.

*

Exemplele considerate, credem că sunt suficiente pentru a pune în evidenţă principiul noii metode de rezolvare a ecuaţiilor diofantiene de forma

$$\prod_{i=1}^{m} x_i = x^n.$$

De sigur, în anumite cazuri particulare, descompunerea întregului n într'o sumă de m termeni întregi, pozitivi sau nuli, poate fi mai dificilă, reclamând multă atenţiune.

Pe baza elementelor date, se poate însă întreprinde, cu oarecare bunăvoinţă, studiul problemei şi pentru alte cazuri particulare, sau chiar şi pentru cazul ei general.

NOTE MATEMATICE

12. — *Asupra Notei 10 din numărul precedent.*

Observ că ecuaţia

$$x^2 - x\,y + y^2 = c\,d$$

se mai poate scrie

$$(x + y)^2 + 3\,(x - y)^2 = 4\,c\,d,$$

care conduce la expresii mai simetrice pentru x şi y

$$\begin{aligned} 2\,x &= (3\,\varepsilon' + 1)\,\alpha\,\delta - 3\,\varepsilon\,\beta\,\gamma) + (1 + \varepsilon')\,(\alpha\,\gamma + 3\,\varepsilon\,\beta\,\delta), \\ 2\,y &= (3\,\varepsilon' - 1)\,(\alpha\,\delta - 3\,\varepsilon\,\beta\,\gamma) + (1 - \varepsilon')\,(\alpha\,\gamma + 3\,\varepsilon\,\beta\,\delta), \end{aligned} \tag{A}$$

pe care le-am fi putut obţine de altfel din formulele (6) din Nota sus citată, printr'o schimbare lineară de variabile.

M. G.

13. — *Elementarer Beweis der rationalen Unmöglichkeit von* $X^4 + Y^4 = Z^4$.

Die rationale Unmöglichkeit der Gleichung $X^4 + Y^4 = Z^4$ hat bereits *Euler* nachgewiesen. Da diese Equation einen Spezialfall einer pythagoräischen Gleichung bildet, so muss ihre Solution unter die Formel von Brahmagupta fallen:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2\,a\,b)^2 = (a^2 + b^2)^2,$$

wobei a und b rational sind. Es müsste ferner

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= p^2 \\ a^2 - b^2 &= m^2 \\ \hline \text{also} \qquad 2\,a^2 &= p^2 + m^2 \end{aligned}$$

in rationalen Zahlen lösbar sein. Dann müssten m^2, a^2, p^2 oder $(a^2 - b^2)$, a^2, $(a^2 + b^2)$ eine arithmetische Progression bilden, bei welcher die Differenz *selbst* wiederum ein *rationales Quadrat* nämlich b^2 ist. Nun können zwar 3 rationale Quadrate eine arithmetische Progression bilden, aber die Differenz dieser arithmetischen Progression kann *nicht* selbst ein rationales Quadrat sein (cf. Carmichael, Analyse indéterminée, page 13). Also ist $X^4 + Y^4 = Z^4$ rational unlösbar.

ALFRED MOESSNER
(Nürnberg)

14. — *Relaţiuni între diagonalele unui poligon cu laturi progresive.*

D-l Prof. *V. Alaci* [1], numeşte poligon progresiv, poligoanele a căror laturi subîntind arce în progresie aritmetică.

Pentru a avea un poligon cu n laturi, se împarte cercul în care este înscris poligonul, în $\frac{n(n+1)}{2}$ diviziuni egale.

În ceiace urmează, păstrând notaţiunile D-lui Prof. *Alaci*, voi stabili expresiunea sumei şi produsului diagonalelor ale acestui fel de poligon.

1. Numărul diagonalelor ce se pot duce într'un poligon cu n laturi. dintr'un acelaşi vârf, este $\mu = n - 3$.

Considerăm poligonul de laturi progresive A B C D E F . . .

[1]) *V. Alaci*, Poligoane cu laturi progresive (Gazeta Matem. 1912).

Prima latură A B a poligonului subîntinde arcul $\overset{\frown}{AB}$:

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{4\pi}{n(n+1)}.$$

Notăm ca în articolul citat:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{2\pi}{n(n+1)} = \alpha.$$

Ţinând seamă, că diferitele triunghiuri: A B C, A C D, A D B... etc., — cu ajutorul cărora vom calcula diagonalele $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_\mu$ — sunt triunghiuri înscrise în cerc, vom exprima unghiurile lor cu uşurinţa văzând că toate sunt M α.

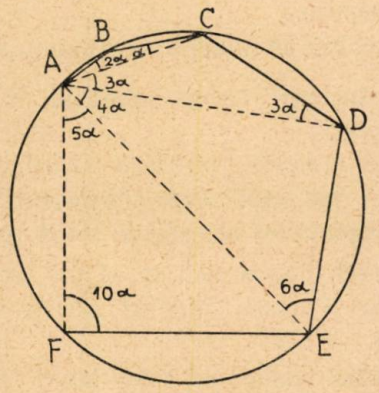
Într'adevăr inspectând figura, se vede că putem scrie:

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle\, \delta_1\, \overline{AB} = 2\alpha \\
&\sphericalangle\, \delta_2\ \ \delta_1 = 3\alpha \\
(1)\qquad &\sphericalangle\, \delta_3\ \ \delta_4 = 4\alpha \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\sphericalangle\, \delta_\mu\, \delta_{\mu-1} = (\mu+1)\,\mu = (n-2)\,\alpha
\end{aligned}$$

şi încă:

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle\, \delta_1\, \overline{BC} = \alpha \\
&\sphericalangle\, \delta_1\, \overline{CD} = 3\alpha \\
(2)\qquad &\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\sphericalangle\, \delta_\mu\, a_{\mu+1} = \frac{\mu(\mu+1)}{2}\alpha,
\end{aligned}$$

în care $a_{\mu+1}$ este latura a $(\mu+1)-a$ a poligonului.



Considerând acum triunghiurile A B C, A C D... etc. din care fac parte ca laturi, diagonalele $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_\mu$, putem scrie egalităţile:

$$\begin{aligned}
&\delta_1 = a_1 \cos 2\alpha + a_2 \cos \alpha \\
&\delta_2 = \delta_1 \cos 3\alpha + a_3 \cos 3\alpha \\
(3)\qquad &\delta_3 = \delta_2 \cos 4\alpha + a_4 \cos 6\alpha \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\delta_\mu = \delta_{\mu-1} \cos(\mu+1)\alpha + a_{\mu+1} \cos \frac{\mu(\mu+1)}{2}\alpha.
\end{aligned}$$

Insă o latură oarecare a poligonului cu laturi progresive este dată de:

$$(4)\qquad a_\mu = 2r \sin \frac{2\mu\pi}{n(n+1)} 2r \sin \mu\alpha.$$

Ţinând seama de relaţia (4), relaţiile (3) se mai pot scrie:

$$\begin{aligned}
&\delta_1 = 2r \sin \alpha \cos 2\alpha + 2r \sin 2\alpha \cos \alpha = 2r \sin 3\alpha \\
&\delta_2 = 2r \sin 3\alpha \cos 3\alpha + 2r \sin 3\alpha \cos 3\alpha = 2r \sin 6\alpha \\
(3')\qquad &\delta_3 = 2r \sin 6\alpha \cos 4\alpha + 2r \sin 4\alpha \cos 6\alpha = 2r \sin 10\alpha \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\delta_\mu = \cdots\cdots\cdots\cdots = 2r \sin \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}\alpha.
\end{aligned}$$

De unde rezultă că:

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_\mu =$$
$$2r\left[\sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \cdots + \sin \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}\alpha\right]$$

sau scriind mai strâns:

$$(I)\qquad \boxed{\sum_{i=1}^{\mu} \delta_i = 2r \sum_{i=1}^{i=\mu} \sin \frac{(i+1)(i+2)}{2}\alpha}.$$

Şi

$$\delta_1\, \delta_2\, \delta_3 \ldots \delta_\mu =$$
$$2^\mu r^\mu \sin 3\alpha \sin 6\alpha \sin 10\alpha \ldots \sin \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}\alpha.$$

sau

$$(II)\qquad \boxed{\prod_{i=1}^{i=\mu} \delta_i = 2^\mu r^\mu \prod_{i=1}^{i=\mu} \sin \frac{(i+1)(i+2)}{2}\alpha}.$$

Aceste relaţiuni (I) şi (II) care ne dau suma şi produsul diagonalelor în poligoanele cu laturi progresive, se transformă cu uşurinţă în acelea care ne dau acelaşi lucru în poligoanele regulate [2].

MIHAIL ST BOTEZ

[2]) De produsul diagonalelor într'un poligon regulat, s'au ocupat d-nii Prof *F. Sibiriani, Giuseppe Palamà* şi *E. Ducci* în Boll. del'Umi, 1929—1934 şi Boll. di Matem. 1935.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVII, No. 10, Iunie 1942. Asupra curbelor deduse prin proprietatea triunghiurilor în care unghiurile $B = 2A$, de *N. Abramescu*. Asupra triunghiurilor în care $B = 2A$, de *N. Gh Gaiu* Asupra unor serii, de *A Dobrescu*. Raport pentru acordarea premiului *„Vasile Cristescu"*, de *Al. V. Niculescu, C. Ionescu-Bujor, Gabriela Ţiţeica*. Note matemat ce, probleme rezolvate şi propuse

2. *Petre Sergescu*. Un episod din bătălia pentru triumful calculului diferenţial: Polemica *Rolle-Saurin* 1702—1705 (Monitorul Of, Bucureşti 1942).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1125. — *Dreapta* Δ *taie laturile triunghiului* ABC *în* a, b *şi* c; *în aceste puncte ducem trei drepte, care formează cu laturile triunghiului* ABC *unghiul* α *şi care dau naştere triunghiului* $A_1B_1C_1$: *Să se demonstreze:*

1°. *Că dreptele* AA_1, BB_1, CB_1 *sunt concurente într'un punct* M *situat pe cercul circumscris triunghiului* ABC.

2° *Că cercurile circumscrise patrulaterelor* AA_1bc, BB_1ca *şi* CC_1ab *trec prin punctul* N *situat tot pe cercul circumscris lui* ABC.

3°. *Să se găsească locul geometric al centrului cercului circumscris lui* $A_1B_1C_1$ *când dreapta* Δ *variază oricum în plan.*

ALEXANDRU NICOLAU.

1°. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ fiind omologice de ax Δ, dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente într'un punct M. Patrulaterele CC_1ab şi BB_1ca sunt însă inscriptibile deoarece

$$\sphericalangle C_1bC = \sphericalangle C_1aC = \alpha = \sphericalangle B_1aB = \sphericalangle B_1cB,$$

de unde rezultă că

$$\sphericalangle MCA = \sphericalangle baC_1 = \sphericalangle B_1ac = B_1BC = \sphericalangle MBA$$

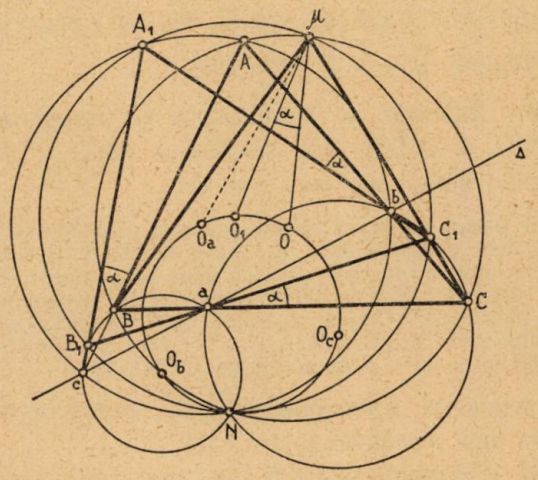
deci M se află pe cercul circumscris lui ABC de centru O şi unghiul $BMC = \sphericalangle A$.

Laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ făcând cu ale triunghiului ABC acelaş unghiu α, ele sunt asemenea şi au deci unghiurile egale. Cum unghiul

$$B_1MC_1 = \sphericalangle A = \sphericalangle A_1,$$

rezultă că M se află şi pe cercul circumscris lui $A_1B_1C_1$ de centru O_1.

2°. Patrulaterele dela punctul 2° al enunţului sunt inscriptibile, cum am văzut mai sus. Cercurile circumscrise lor trec prin punctul *Miquel* al triunghiului ABC tăiat de transversala Δ şi acest punct N se găseşte pe cercul O. Centrele celor trei cercuri le notăm cu O_a, O_b şi O_c. Cercurile O_b şi O_c se taie cu N şi a; rezultă dintr'o proprietate cunoscută că unghiurile BNC şi B_1NC_1 sunt egale între ele şi cum primul este suplimentul lui A, egal cu A_1, punctul N se află şi pe cercul circumscris lui $A_1B_1C_1$, de centru O_1.



3°. Din patrulaterul inscriptibil $BNcB_1$ rezultă că $\sphericalangle BNB_1 = \sphericalangle BcB_1 = \alpha$, deci cercurile O şi O_1 se taie sub unghiul α şi $OMO_1 = \alpha$. Când dreapta Δ variază în plan, paralel cu ea însăşi, triunghiurile AA_1b, BB_1c şi CC_1a rămân asemenea cu ele înşile, deci punctul M rămâne fix şi punctele A_1, B_1 şi C_1 se mişcă pe dreptele fixe AM, BM, CM. Rezultă că locul geometric al lui O_1 este dreapta O_1M, care face cu OM unghiul α. Când dreapta Δ se învârteşte în jurul unui punct, de exemplu a, cu 2π, punctul M va parcurge cercul O, deoarece $\sphericalangle baC_1 = \sphericalangle bCC_1$ variază şi el cu 2π. Deci dreapta O_1M se va roti cu 2π, unghiul OMO_1 râmânând egal cu α. Rezultă că locul geometric al lui O_1 este tot planul exterior cercului de rază $OM \sin\alpha$. Locul geometric este interesant, de oarece în general, în cazul unei duble indeterminări, ca în cazul acestei probleme, locul geometric este întregul plan şi nu numai o porţiune din el.

Observaţii. Figura problemei se bucură de numeroase proprietaţi, de exemplu:

1°. Centrele O, O_1, O_a, O_b, O_c şi punctul N sunt concentrice pe un cerc *Miquel* comun triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$ tăiate de axa de omologie Δ.

2°. Δ este dreptă *Simson* de unghiu θ a punctului N în triunghiul ABC şi de unghiu $\theta + \alpha$ în triunghiul $A_1B_1C_1$, θ fiind unghiul de acelaşi sens al dreptelor N_a, N_b, N_c cu laturile triunghiului ABC.

3°. Dreptele *Simson* ale punctului M faţă de triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$, fac cu transversala Δ, unghiul $\frac{\pi}{2} - \alpha$ în sens invers.

4°. Raportul de similitudine al triunghiurilor $A_1B_1C_1$ şi ABC este $\sin(\theta + \alpha) : \sin\theta$, θ fiind unghiul definit mai sus, etc. etc.

S'a primit o singură soluţie a acestei probleme în anul 1932 dela d-l *Mihăileanu* pe atunci student la Bucureşti, în care sunt menţionate aproape toate proprietăţile enunţate mai sus, afară de determinarea locului geometric de sub punctul 3°. D-sa a generalizat ulterior proprietăţile triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$, pe care le-a numit isohomologice, într'o notă publicată în Mathesis.

Observare. Cunoştinţele expuse permit a soluţiona încă următoarea problemă:

Să se construiască pentru un triunghiu dat ABC o dreaptă Simson având o direcţie dată.

Dacă în problema tratată luăm $\alpha = \frac{\pi}{2}$ şi ducem o dreaptă paralelă cu Δ, construind triunghiul $A_1B_1C_1$, atunci cercul circumscris al lui, taie cercul lui ABC în două puncte M şi N, din care unul este punctul căutat a cărui dreaptă *Simson* e paralelă cu Δ, pentru ambele triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$.

Celălalt punct, ne dă două drepte *Simson* în cele două triunghiuri, care drepte sunt perpendiculare una pe alta şi se întâlnesc pe dreapta Δ.

Ar fi interesant un studiu mai amănunţit al acestui caz.

Problema 1577. — *Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu, cunoscând ipotenuza sa şi ştiind că dacă se împart laturile în acelaş raport dat şi în acelaş sens, triunghiul ale cărui vârfuri sunt punctele de diviziune e de asemenea dreptunghiu.*

ION C. SCHILERU-DILI

Fie A', B', C' punctele de diviziune: din

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{A'A} = \frac{C'A}{C'B} = \frac{m}{n},$$

deducem

$$A'B = \frac{am}{m+n}, \quad A'C = \frac{an}{m+n}, \quad B'C = \frac{bm}{m+n},$$

$$B'A = \frac{bn}{m+n}, \quad C'A = \frac{cm}{m+n}, \quad C'B = \frac{cn}{m+n}.$$

Triunghiurile $B'AC'$, $C'BA'$, $A'CB'$ dau apoi

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{AC'}^2 = \frac{b^2n^2 + c^2m^2}{(m+n)^2},$$

$$\overline{C'A'}^2 = \frac{a^2m^2 + c^2n^2 - 2acmn\cos B}{(m+n)^2},$$

$$\overline{A'B'}^2 = \frac{a^2n^2 + b^2m^2 - 2abmn\cos C}{(m+n)^2}.$$

Vom deosebi acum trei cazuri

1°. *Triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghiu în A'.* Relaţia

$$\overline{B'C'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A'C'}^2$$

devine

$$b^2n^2 + c^2m^2 = a^2m^2 + c^2n^2 - 2acmn\cos B + a^2n^2 + b^2m^2 - 2abmn\cos C$$

sau, de oarece avem

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad c\cos B + b\cos C = a,$$

$$m^2b^2 + n^2c^2 = a^2mn = (b^2 + c^2)mn,$$

din care deducem $\frac{b}{c} = \pm\sqrt{\frac{m}{n}}$, semnul + corespunzând împărţirei *exterioare*, iar — celei *exterioare*. Relaţiile

$$b^2 + c^2 = a^2, \qquad \frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n}$$

permit calculul catetelor b şi c, cu care problema este rezolvată.

Am presupus, de sigur, $m \neq n$, căci altfel triunghiul $A'B'C'$ este evident dreptunghiu şi nu reprezintă o condiţie nouă.

2°. *Triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghiu în B'.*

$$\overline{A'C'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2$$

devine, după reduceri,

$$\frac{m}{n} = \frac{b^2}{a(b\cos C - c\cos B)} = \frac{b^2}{b^2 - c^2},$$

care arată că $b \gtrless c$ după cum raportul $\frac{m}{n} \gtrless 0$.

3°. *Triunghiul* $A'B'C'$ *este dreptunghiu în* C'. Relaţia

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{B'C'}^2 + \overline{C'A'}^2$$

devine, după reduceri,

$$\frac{m}{n} = \frac{a(c\cos B - b\cos C)}{c^2} = \frac{c^2 - b^2}{c^2},$$

care arată că $c \gtrless b$, după cum raportul $\frac{m}{n} \gtrless 0$.

În definitiv, problema admite totdeauna trei soluţii pentru $k = \frac{m}{n}$ dat, câte una de fiecare caz, căci a, b, c, lungimile laturilor triunghiului ABC, trebue să fie pozitive.

Notă. 1°. D-l Sublt *C. Lupescu* a rezolvat problema proectând punctele A', B', C' pe una din catetele AB, AC şi considerând triunghiuri dreptunghice în care $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ sunt ipotenuze.

2°. D-l *A. Ripianu* a dat o soluţie analitică.

M. G.

Problema 1866. — *Să se găsească un bipatrat de şase cifre a cărui rădăcină să fie egală cu suma cifrelor lui.*

MARIN F. VADUVA.

Fie $abcdef = N^4$ bipatratul de şase cifre cerut, sau desvoltat

$$N^4 = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f.$$

Conform enunţului însă,

$$N = a + b + c + d + e + f.$$

Prin scădere deducem

$$N^4 - N = \text{mult. } 9,$$

sau

$$(1) \qquad N(N-1)(N^2+N+1) = \text{mult. } 9.$$

De altă parte, fiindcă N^4 are şase cifre, rezultă

$$(2) \qquad 18 \leq N \leq 31.$$

Dintre întregii care satisfac dubla inegalitate (2), numai numerele

18, 19, 22, 25, 27, 28 şi 31

satisfac şi egalitatea (1).

Ridicând aceste numere la puterea a 4-a, constatăm că soluţiile problemei sunt

$$22^4 = 234256 = (2+3+4+2+5+6)^4$$
$$25^4 = 390625 = (3+9+0+6+2+5)^4$$
$$28^4 = 614656 = (6+1+4+6+5+6)^4.$$

Soluţii analoage date de d-nii: *Bakonyi C.* (Politechnica, Timişoara) şi *Dr. A. Gloden* (Luxemburg).

Au găsit soluţiile date, ridicând la patrat toate numerile întregi cuprinse între 17 şi 32, d-nii *Ionescu F. Petre* (Colegiul Carol I, Craiova) şi S-Lt. *Lupescu Corneliu* (Roman).

Au dat numai soluţia 22^4, fără nici o motivare, d-nii *Cărlan S. Nicolae* (lic. Tecuci) şi *Ţarălungă Savel* (lic. Internat, Iaşi.)

Problema 1867. — *Dacă*

$$2y(y - x - 1) + x(y^2 + 1) = 0,$$

avem relaţia

$$3x^2y^4 - xy\Sigma(2a+b) + 2\Sigma ab = \Sigma(x-2a)(x-b),$$

a, b, c fiind cantităţi cunoscute.

NICOLAE I. CRISTEA.

Prima relaţie se mai poate scri

$$x(y^2 - 2y + 1) + 2y(y-1) = 0,$$

sau încă

$$(y-1)[x(y-1) + 2y] = 0$$

De aci deducem

$$(1) \quad y = 1, \qquad \text{sau} \qquad (2) \quad y = \frac{x}{2+x}.$$

Pentru $y = 1$, relaţia cerută devine însă

$$3x^2 - x\Sigma(2a+b) + 2\Sigma ab = \Sigma(x-2a)(x-b).$$

Cum această relaţie este o identitate evidentă, rezultă că dacă prima relaţie este satisfăcută, atunci şi a 2-a relaţie are loc.

Dacă înlocuim pe y dat de (2), în relaţia cerută în enunţ, constatăm că această relaţie nu este verificată

Soluţii date de D-ra *Checian N. Ana* (studentă, Timişoara) şi de d-nii *Boleanţu Lazăr* (Polit., Timişoara) şi *Petru S. Şimon* (lic., Arad.)

Problema 1892. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} 3x^2y + xy^2 = 80 \\ y + 6xy + 3x = 48. \end{cases}$$

N. ANDRIEVICI.

Sistemul se mai poate scri

$$(1)\qquad \begin{cases} xy(3x+y)=80 \\ (3x+y)+6xy=48. \end{cases}$$

Scoţând $3x+y$ din ecuaţia 2-a şi înlocuind-o în prima, obţinem

$$6(xy)^2-48xy+80=0,$$

de unde

$$xy=\frac{2}{3}(6\pm\sqrt{6})$$

Înlocuind această valoare a lui xy în a 2-a ecuaţie din (1), avem

$$3x+y=4(6\mp\sqrt{6}).$$

Sistemul (1) este astfel echivalent cu următorul sistem

$$\begin{cases} 3xy=2(6\pm\sqrt{6}) \\ 3x+y=4(6\pm\sqrt{6}). \end{cases}$$

De aci rezultă că, $3x$ şi y sunt rădăcinele ecuaţiei

$$t^2-4(6\mp\sqrt{6})t+2(6\pm\sqrt{6})=0,$$

deci

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(6\mp\sqrt{6})\pm\sqrt{156\mp 50\sqrt{6}}}{3} \\ y=2(6\pm\sqrt{6})\mp\sqrt{156\mp 50\sqrt{6}}, \end{cases}$$

rădăcini, care se pot explicita în patru sisteme de soluţii.

Au dat soluţii: D-ra *Mang Ileana* (studentă, Timişoara) şi d-nii: *Goga Florian* (student, Timişoara), *Popescu Corneliu* (S-Lt, Roman). *Manolache C. Mircea* (ltc. Internat, Iaşi), *Popescu Adrian* (S-Lt) şi *Simon Ş. Petru* (lic. Arad).

PROBLEME PROPUSE

2050. — Să se găsească patratul perfect $abcdef$ cu toate cifrele însemnătoare, astfel ca abc şi def să fie şi ele patrate perfecte.

N. N. ANITESCU

2051. — Într'un sistem de numeraţie de bază B, să se găsească un număr N de n cifre, care divide numărul de cifre al numerilor obţinute scriind şirul natural de numere întregi de la 1 la N.

Aplicaţie: $B=10$, $n=5$.

V. THÉBAULT

2052. — Produsul a patru termeni consecutivi, întregi a unei progresii aritmetice este 105.

Să se găsească acei termeni.

CAP. EUGEN ŞT. IACOB

2053. — Să se rezolve, în întregi, ecuaţiile simultane

$$X^2+aY^2+bZ^2+abT^2=U^2,$$

$$V^2+aY^2+bZ^2+abT^2=X^2,$$

unde a şi b sunt întregi daţi.

M. GHERMANESCU

2054. — Să se arate că pentru $m=\infty$, avem:

$$\lim\left(\frac{m^2-m-2}{m^2-4}\right)^m \lim\left(\frac{m^2+m-2}{m^2-1}\right)^m=1.$$

EMANOIL I. SARULESTEANU

2055. — Se dă triunghiul ABC cu ortocentrul în H. Fie A', B', C' mijloacele laturilor sale şi H_a, H_b, H_c mijloacele segmentelor AH, BH, CH. Perpendiculara din H_c pe HC' întâlneşte pe AB în C_1. Se construesc analog punctele A_1, B_1.

Să se demonstreze că punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare şi că proecţiile lui A, B, C pe HA', HB', HC' sunt pe cercul ABC.

G-L GH. BUICLIU

2056. — Să dă triunghiul dreptunghic ABC. Se descrie pe AB un semicerc de partea ipotenuzei şi se duce o paralelă oarecare la AC, care taie în D şi E ipotenuza şi semicercul. Din E se duce o paralelă la AB, care taie în M perpendiculara în B pe AB, iar pe EM se ia punctul F astfel ca

$$\sphericalangle FBM=\sphericalangle ABC.$$

Se ridică apoi în D o perpendiculară pe BC pe care se ia segmentul $DG=BF$.

Să se demonstreze că patrulaterul $ABGC$ este inscriptibil.

V. ALACI

2057. — Să se arate că, dacă arcele α, β, γ satisfac relaţia

$$\gamma=\alpha+\beta,$$

avem:

$$\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\gamma=2(1+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma).$$

EUGEN WEGENER

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés.

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu,* profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XX, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XX, cu preţul de lei 200 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebue să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXII. AUGUST 1942 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU**: O OBSERVARE ASUPRA PATRULATERULUI CONVEX SI O PROBLEMA.

1. **V. ALACI**: UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE" (URMARE).

3. NOTE MATEMATICE: 15 16.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 851, 1612, 1660, 1665.

6. PROBLEME PROPUSE: 2058 — 2065.

7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice Tipografia Romania

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — NO. 6 TIMISOARA, AUGUST 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

O OBSERVARE ASUPRA PATRULATERULUI CONVEX ȘI O PROBLEMĂ

DE

D. POMPEIU.

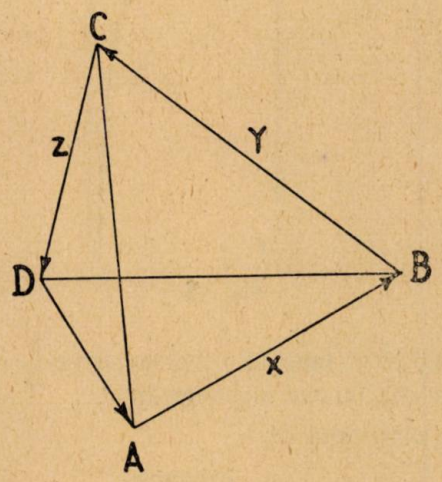
1. Să plecăm de la identitatea

$$\frac{x+y}{y+z} \equiv \frac{(x+y)(x+z)}{(y+z)(x+z)},$$

în care x, y și z sunt numere oricare: reale sau *complexe.*

Efectuând calculele în membrul al doilea al identității (1), găsim

$$\frac{x+y}{y+z} \equiv \frac{yz+x(x+y+z)}{xy+z(x+y+z)}. \tag{2}$$



2. Să presupunem acum că x, y și z sunt numere complexe și să interpretăm identitatea (2) *vectorial,* în modul următor: ABCD este un patrulater convex cu laturile *orientate* astfel:

Vectorul AB corespunde numărului complex x;

Vectorul BC: numărului complex y; iar numărul z corespunde vectorului CD.

În aceste condiții vectorului AD îi corespunde suma (de numere complexe)

$$x+y+z.$$

Iar, numerele complexe $x+y$ și $y+z$ au, ca interpretare geometrică: diagonalele AC și BD, segmente orientate (vectori).

3. Am interpretat astfel, geometricește sau mai bine *vectorial,* identitatea (2). Ce înseamnă dar, geometricește, această identitate (2)?

Într'un patrulater convex oricare, orientat, raportul între diagonalele-vectori este egal cu raportul între sumele de produse ale laturilor-vectori care, respectiv, se întâlnesc la capetele fiecăreia din diagonale.

Însă, în cărțile clasice de Geometrie, noi avem o teoremă analoagă, pentru patrulaterul convex, însă cu condiția expresă ca acest patrulater să fie *inscriptibil.*

În teorema clasică e vorba de *lungimi simple* (numere *pozitive*) adecă, dacă ne raportăm la vectorii noștri, de *module.*

Prin urmare, păstrând tot notațiile noastre, cu numere complexe, în cazul particular al patrulaterului *inscriptibil,* identitatea (2) rămâne adevărată și sub forma

$$\frac{|x+y|}{|y+z|} \equiv \frac{|y|.|z|+|x|.|x+y+z|}{|x|.|y|+|z|.|x+y+z|}. \tag{3}$$

Aceasta e teorema clasică pentru patrulaterul *inscriptibil.*

4. Dar atunci se impune următoarea cercetare:

Cum se face că, prin introducerea condiției de *inscriptibilitate,* în relația (2) numerile complexe (cu *modul* și *argument*) ajung să fie înlocuite cu *modulele* lor?

Aceasta e problema pe care o propunem cititorului pe care chestiunea îl poate interesa.

UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE"

DE

V. ALACI.

(urmare)

Curba puntiformă.

41. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică*

(106) $$r^2 = a^2 - b^2 \operatorname{cotg}^2 \theta.$$

Prima soluție. Configurația (106) este simetrică — într'un sistem de axe rectangulare — față de axe și origina lor, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi + \theta$, r rămâne același.

Vom construi dar configurația (106), întâi, în primul cadran și apoi o vom întregi cu simetricele ei față de axe și origina lor.

Pentru aceasta, efectuăm în primul cadran următoarea construcție prin puncte, observând că r este pozitiv, dacă condiția

(107) $$\theta \geq \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$$

este satisfăcută.

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *luăm pe* Ox *segmentele*

$$OA = a, \qquad AB = b$$

și ducem în A *pe* Ox *perpendiculara* Δ, *pe care fixăm punctul* K *astfel ca* $AK = b$.

Trasăm apoi o semi-dreaptă oarecare $O\alpha$, *care să nu se coboare sub* OK, $(\sphericalangle xO\alpha = \theta)$, *pentru că numai astfel condiția* (107) *este satisfăcută.*

Mai departe, ducem din B *o perpendiculară pe* $O\alpha$ *până întâlnește pe* Δ *în* C, *trasăm semicercul de diametru* OA *în care luăm coarda* $AD = AC$, *iar pe* Ox *măsurăm segmentul* OE *egal cu coarda* OD.

Intersecția I *a lui* $O\alpha$ *cu perpendiculara în* E *pe* $x'x$ *aparține configurației cerute,* (fig. 33).

În adevăr, însemnând

$$OE = r. \qquad \sphericalangle xOI = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului I, din triunghiurile dreptunghice BAC și OAD, deducem respectiv

$$AC = AB \operatorname{cotg} \widehat{ACB} = b \operatorname{cotg} \theta,$$

$$\overline{OD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AD}^2,$$

sau

$$r^2 = a^2 - b^2 \operatorname{cotg}^2 \theta,$$

tocmai ecuația (106). Punctul I a fost astfel bine determinat.

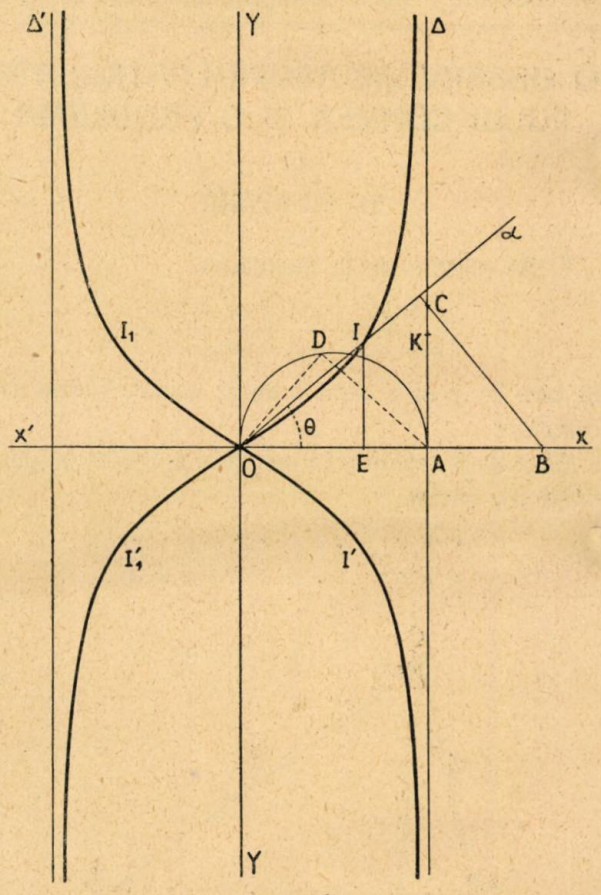


Fig. 33.

Variind θ în intervalul închis $\left(\operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem alte puncte analoage lui I.

Observând apoi că,

$$r\,r' = \frac{b^2 \operatorname{cotg} \theta}{\sin^2 \theta}$$

și că *ordonata* lui I satisface relației

$$y^2 = r^2 \operatorname{tg}^2 \theta = a^2 \operatorname{tg}^2 \theta - b^2, \quad \text{deci} \quad y\,y' = \frac{a^2 \operatorname{tg} \theta}{\cos^2 \theta},$$

putem forma următorul tablou de variație, unde am presupus $b < a$:

θ	$\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\sqrt{a^2-b^2}$	a
r'	+	+	+
y	0	$\sqrt{a^2-b^2}$	∞
y'	+	+	+

Din acest tablou deducem că: *În primul cadran, configurația* (106) *este formată din ramura* O I *ce pleacă din origină și se ridică asimptotic spre dreapta* Δ.

Această ramură întregită cu simetricele ei față de axe și origina lor, ne dă toată configurația (106).

Soluția 2-a. Transpunând în *coordonate carteziene* ecuația (106), ea devine în virtutea formulelor de transformare (9′):

$$x^2 y^2 = a^2 y^2 - b^2 x^2. \tag{106′}$$

Această curbă, cunoscută sub numele de **curba puntiformă**[1] și pentru care noi am dat în *prima soluție* o construcție prin puncte, este studiată pe cale algebrică.

Observare. Tot în Vol. citat, găsim și următoarea construcție prin puncte pentru **curba puntiformă:**

„Considérons maintenant l'hyperbole représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{107}$$

et menons par un quelconque de ses points une tangente, ensuite traçons par le point où cette droite coupe chacun des axes une parallèle à l'autre; les deux droites qu'on obtient ainsi déterminent par leur intersection un point, qui décrit, quand la tangente varie, une courbe nomée par *M. Schoute* **puntiforme** (Kohlenspitzenkurve)...“

Construcția prin puncte dată de noi mai sus, în prima soluție, credem că este mult mai bună, fiindcă acea dată de *Schoute*, necesită construcția prin puncte a iporbolei (107) și a tangentelor în fiecare din punctele ei, geometricește nu ușor de realizat.

[1]) Dr. *G. Teixeira*. Loc. cit. Vol. I, p. 286.

Cuartica piriformă dublă:

42. **Problema.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică*

$$(r-a)(b-r) = c^2 \operatorname{tg}^2\theta, \quad (b>a>0, \quad c>0). \tag{108}$$

Prima soluție. Configurația (108) este simetrică — într'un sistem de axe rectangulare — față de axe și origina lor, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi+\theta$, r rămâne același.

Vom construi dar configurația (108), întâi, în primul cadran și apoi o vom întregi cu simetricele ei față de axe și origina lor.

Pentru aceasta, efectuăm în primul cadran, următoarea construcție prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *luăm pe* Ox *segmentele*

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c.$$

Din O *ducem o semi-dreaptă variabilă* Oα ($\sphericalangle xO\alpha = \theta$) *și fie* T *intersecția ei cu perpendiculara în* C *pe* Ox.

Prin T *ducem o paralelă la* Ox, *care intersectează semicercul de diametru* A B *în* M, N.

Intersecțiile I, J *ale lui* Oα *cu perpendicularele* M M′ *și* N N′ *pe* Ox, *aparțin configurației cerute,* (fig. 34).

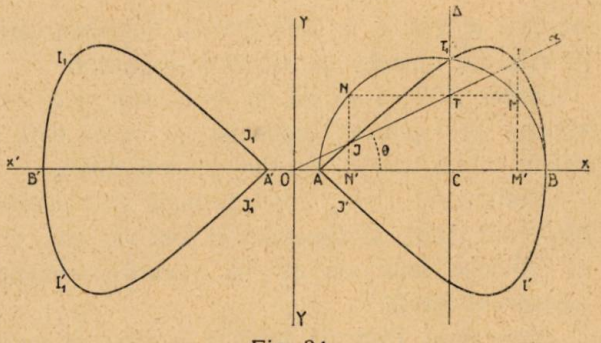


Fig. 34.

În adevăr, însemnând

$$OM' = r, \qquad \sphericalangle xOI = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului I și

$$ON' = r_1, \qquad \sphericalangle xOJ = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului J, deducem din triunghiurile dreptunghice O C T, A M B și A N B relațiile

$$CT = OC\,tg\,\widehat{COT} = c\,tg\,\theta$$

$$\overline{MM'}^2 = AM' \cdot M'B = (OM' - OA)(OB - OM')$$

$$\overline{NN'}^2 = AN' \cdot N'B = (ON' - OA)(OB - ON'),$$

sau

$$c^2\,tg^2\,\theta = (r - a)(b - r),$$

$$c^2\,tg^2\,\theta = (r_1 - a)(b - r_1).$$

identice ecuației (108). Punctele I și J au fost astfel bine determinate.

Variind θ în intervalul $(0, \sphericalangle xOT_1)$, unde $CT_1 = \frac{b-a}{2}$, cum ușor se vede din figură, *obținem ramura* A J I B *din primul cadran, pentru care* $a \leq r \leq b$.

Intregind ramura A J I B *cu simetricele ei față de axe și origina lor, obținem toată configurația* (108) *formată din buclele* A J I B I′ J′ A, A′ J_1 I_1 B′ I_1' J_1' A′ *simetrice față de axa* $y'y$.

Soluția 2-a. Transpunând ecuația (108) în *coordonate carteziene*, în virtutea formulelor de transformare (9′), obținem pentru cadranele I, IV,

$$x^2(x - a)(b - x) = c^2 y^2. \qquad (108')$$

Această *ecuație analitică*, generalizează evident ecuația

$$x^3(a - x) = b^2 y^2 \qquad (109)$$

studiată în Vol. I, p. 289 (Dr. *G. Teixeira)*, căreia î-i este dat numele de *cuartica piriformă*.

Curbei (109), i se dă în Vol. citat și o construcție prin puncte, analoagă cu aceea dată de noi în prima soluție, cazului general (108′).

Configurația (108), fiind formată din *cuartica piriformă* (108′) și simetrica ei față de axa $y'y$, se înțelege ușor de ce am numit-o **cuartică piriformă dublă.**

Observare. Punctul dublu $x = y = 0$ al curbei (108′), nu aparține configurației (108).

O nouă cuartică.

43. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică*

$$r^2 = a^2\,cp^2\,\theta + b^2\,sp^2\,\theta, \qquad (b > a > 0). \qquad (110)$$

Prima soluție. Această configurație este simetrică — într'un sistem de axe rectangulare — față de axe și origina lor, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi + \theta$, r rămâne același.

Vom construi dar configurația (110), întâi, în primul cadran și apoi o vom întregi cu simetricele ei față de axe și origina lor.

Pentru aceasta, efectuăm în primul cadran, următoarea construcție prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *luăm pe* Ox *segmentele*

$$OA = a, \qquad OB = b,$$

pe Oy *luăm segmentele*

$$OA' = a, \qquad OB' = b$$

și trasăm segmentele de dreaptă A′ A, B′ B.

Ducem apoi din O *o semi-dreaptă variabilă* Oα, *care întâlnește în* M, N *segmentele* A′ A, B′ B $(\sphericalangle xO\alpha = \theta)$.

Prin M *ducem o paralelă la* Oy, *iar prin* N *ducem o paralelă la* Ox *și fie* P *intersecția lor*, M′, N′ *fiind proecțiile lui* M, N *pe* Ox.

Acum luăm pe Ox *segmentul* OQ = OP.

Intersecția I *a lui* Oα *cu perpendiculara în* Q *pe* $x'x$, *aparține configurației cerute*, (fig. 35).

În adevăr, însemnând

$$OQ = r, \qquad \sphericalangle xOI = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului I, din triunghiurile dreptunghice OM′M, ON′N, în virtutea *teoremei I-a* de la triunghiurile dreptunghice din *„Trig. patratică“*, avem respectiv

$$OM' = (OM' + M'M)\,cp\,\theta = a\,cp\,\theta$$

$$N'N = (ON' + N'N)\,sp\,\theta = b\,sp\,\theta.$$

Cum, de altă parte

$$M'P = N'N, \qquad OP = OQ = r,$$

din triunghiul dreptunghic OM′P, avem

$$\overline{OP}^2 = \overline{OM'}^2 + \overline{M'P}^2,$$

sau

$$r^2 = a^2\,cp^2\,\theta + b^2\,sp^2\,\theta,$$

tocmai ecuația (110). Punctul I a fost astfel bine determinat.

Variind θ în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, obținem analog lui I alte puncte ale configurației (110).

Pentru a avea mai clar configurația (110), putem

determina în fiecare punct al ei și tangenta corespunzătoare.

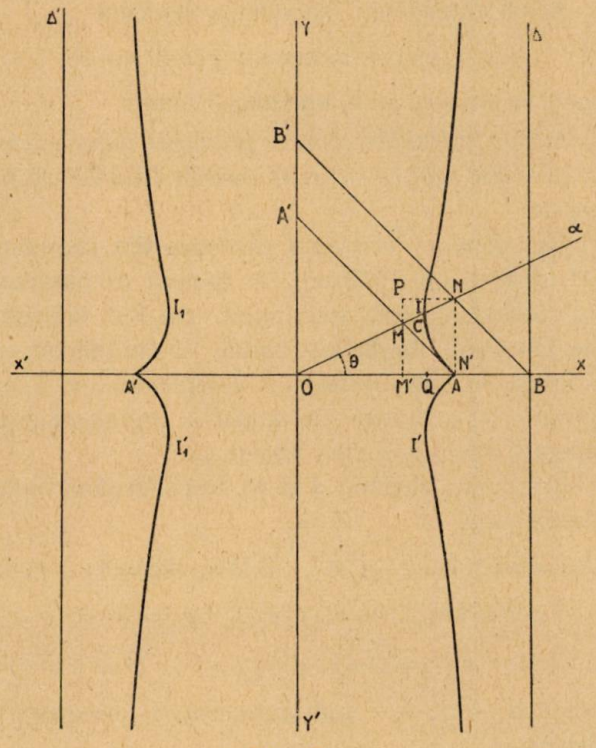


Fig. 35.

În acest scop, folosim formula (20), care în cazul nostru ($\varphi = 90^0$) și pentru primul cadran, devine

$$\text{(111)} \qquad \operatorname{cotg} V = \frac{r'}{r} + \operatorname{tg}\theta.$$

Cum din ecuația (110) obținem prin derivare

$$\text{(112)} \qquad r\,r' = (b^2\,sp\,\theta - a^2\,cp\,\theta)(sp^2\,\theta + cp^2\,\theta),$$

relația (111) devine

$$\operatorname{cotg} V = \frac{(b^2\,sp\,\theta - a^2\,cp\,\theta)(sp^2\,\theta + cp^2\,\theta)}{a^2\,cp^2\,\theta + b^2\,sp^2\,\theta} + \operatorname{tg}\theta.$$

De aci, pentru $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, deducem

$$|\operatorname{cotg} V|_{\theta=0} = -1, \qquad |\operatorname{cotg} V|_{\theta=45^0} = \frac{a^2 + 3b^2}{2(a^2 + b^2)},$$

$$|\operatorname{cotg} V|_{\theta=90^0} = \infty.$$

V fiind unghiul format de tangenta într'un punct al configurației (110) cu raza vectoare cospunzătoare, rezultă că tangenta în A este chiar A' A, iar în punctul ($r = b$, $\theta = 90^0$) tangenta este chiar perpendiculara Δ dusă din B pe O x.

De asemeni, din (112) rezultând

$$r' = \frac{(b^2\,sp\,\theta - a^2\,cp\,\theta)(sp^2\,\theta + cp^2\,\theta)}{\sqrt{a^2\,cp^2\,\theta + b^2\,sp^2\,\theta}},$$

putem construi, pentru primul cadran, următorul tablou de variație:

θ	0		arctg $\frac{a^2}{b^2}$		$\frac{\pi}{2}$
r	a	↘	$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$	↗	b
r'		−	0	+	

Conchidem de aci că: *Configurația* (110), *în primul cadran, este formată din ramura* A C I *ce pornește din* A *tangentă la* A' A, *se ridică apropiindu-se de axa* O y *până în punctul* C *la distanța* $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, *apoi se îndepărtează de* O y *mergând asimptotic spre dreapta* Δ.

Intregind ramura A C I *cu simetricele ei față de axe și origina lor, avem toată configurația* (110), (fig. 35).

Soluția 2-a. Ținând seamă de relațiile din tabloul (11) *„Trig. patratică“*, din care avem

$$sp^2\,\theta = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{(1+\operatorname{tg}\theta)^2}, \qquad cp^2\,\theta = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}\theta)^2},$$

pentru cadranele I, III și

$$sp^2\,\theta = \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{(1-\operatorname{tg}\theta)^2}, \qquad cp^2\,\theta = \frac{1}{(1-\operatorname{tg}\theta)^2},$$

pentru cadranele II, IV, ecuația (110) devine

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2\operatorname{tg}^2\theta}{(1+\operatorname{tg}\theta)^2},$$ pentru cadranele I, III

și

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2\operatorname{tg}^2\theta}{(1-\operatorname{tg}\theta)^2},$$ pentru cadranele II, IV.

Aceste ecuații, transpuse în *coordonate carteziene*, în virtutea formulelor de transformare (9'), devin respectiv:

$$\text{(110')} \qquad x^2(x+y)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

$$\text{(110'')} \qquad x^2(x-y)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Ecuația (110') est valabilă numai pentru cadra-

nele I, III, iar ecuația (110″) este valabilă numai pentru cadranele II, IV.

Configurația (110) *este astfel formată din părțile curbei* (110′) *din cadranele* I, III, *precum și din părțile curbei* (110″) *din cadranele* II, IV.

Se obține, evident, aceiași configurație ca în prima soluție.

Observare. Punctul dublu $x=y=0$ al curbelor (110′), (110″) nu aparține configurației (110).

(Va urma)

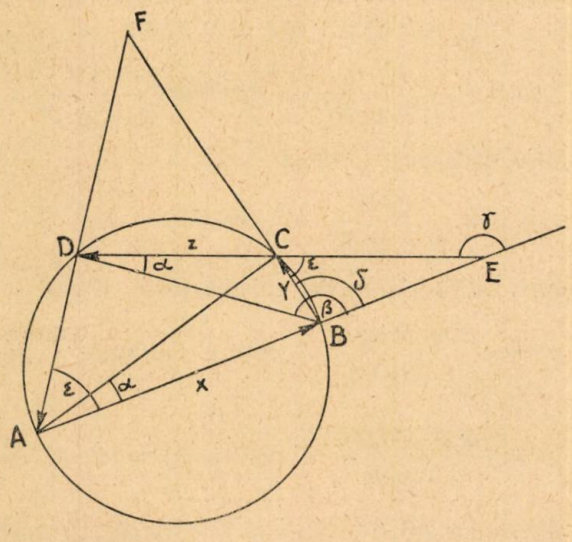
NOTE MATEMATICE

15. — *O chestiune conexă cu aceea din articolul D-lui Prof. Pompeiu* [1].

Inspirindu-mă direct din articolul interesant al D-lui Prof. *Pompeiu* din prezentul N-r, voiu da o nouă demonstrație cunoscutei teoreme a lui *Ptolomeu:*

Într'un patrulater inscriptibil, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.

Voiu stabili tot pe această ca e și propoziția reciprocă, cunoscută de altfel [2].



1. Fie A B C D un patrulater convex cu laturile orientate și x, y, z numere complexe ce corespund *laturilor-vectori* A B, B C, C D.

Pe figură vedem că *diagonalele-vectori* A C, B D și *latura-vector* A D sunt reprezentate, respectiv, prin numerele complexe $x+y$, $y+z$, $x+y+z$.

Acum considerăm identitatea evidentă

$$(1)\qquad (x+y)(y+z)\equiv xz+y(x+y+z),$$

care se traduce prin următorul enunț:

Într'un patrulater convex, produsul diagonalelor-vectori este egal cu suma produselor laturilor-vectori opuse.

Mai departe, urmărind să deduc din identitatea (1) teorema lui *Ptolomeu*, în ipoteza că patrulaterul considerat este inscriptibil, am fost îndemnat de D-l Prof. *Angheluță* căruia î-i mulțumesc, să folosesc în locul numerelor complexe x, y, z, expresiile lor în funcție de *modul* și *argument* și nu operații vectoriale cum voiam eu.

În adevăr, alegând A B ca axă și privind figura, putem scri,

$$AC=x+y=|x+y|e^{i\alpha},\quad BD=y+z=|y+z|e^{i\beta},$$

$$x=|x|,\quad z=|z|e^{i\gamma},\quad y=|y|e^{i\delta},$$

$$AD=x+y+z=|x+y+z|e^{i\varepsilon},\quad (i=\sqrt{-1}),$$

unde α, β, γ, δ, ε sunt *argumentele,* însemnate în figură.

În virtutea acestor relații, identitatea (1) devine

$$(2)\qquad |x+y||y+z|e^{i(\alpha+\beta)}=$$
$$|x||z|e^{i\gamma}+|y||x+y+z|e^{i(\delta+\varepsilon)}.$$

Cum patrulaterul A B C D l'am presupus inscriptibil, urmează că

$$\sphericalangle BAC=\sphericalangle BDC=\alpha,\quad \sphericalangle BAD=\sphericalangle BCE=\varepsilon,$$

iar din triunghiurile B D E, B C E în care γ este unghiu exterior, avem

$$(3)\qquad \gamma=\alpha+\beta=\delta+\varepsilon.$$

În virtutea relațiilor (3), factorii exponențiali din (2) î-i suprimăm și rămâne relația

$$(4)\qquad \boxed{|x+y||y+z|=|x||z|+|y||x+y+z|},$$

care cuprinde tocmai enunțul teoremei lui *Ptolomeu.*

2. **Reciproc.** Să presupunem că într'un patrulater convex oarecare A B C D este satisfăcută relația (4) și *să arătăm că acest patrulater trebuie să fie inscriptibil.*

În adevăr, împărțind relația (2), care există în

[1] R. M. T., August 1942.

[2] *Hadamard.* Géométrie plane, p. 229.

orice patrulater convex, cu relaţia (4) presupusă prin ipoteză satisfăcută, avem:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i(\delta+\varepsilon)} \frac{|x||z|e^{i(\gamma-\delta-\varepsilon)} + |y||x+y+z|}{|x||z|+|y||x+y+z|}.$$

Scriind că modulele sunt egale, obţinem:

$$|x||z|+|y||x+y+z|$$

$$= \sqrt{[|x||z|\cos(\gamma-\delta-\varepsilon)+|y||x+y+z|]^2+|x|^2|z|^2\sin^2(\gamma-\delta-\varepsilon)}$$

$$= \sqrt{[|x||z|+|y||x+y+z|]^2-4|x||y||z||x+y+z|\sin^2\frac{\gamma-\delta-\varepsilon}{2}}$$

Ridicând la patrat şi simplificând, rezultă imediat condiţia

$$\gamma = \delta + \varepsilon. \tag{5}$$

Cum de altă parte, observăm că

$$\gamma = \delta + \sphericalangle BCE, \tag{6}$$

rezultă din (5) şi (6)

$$\varepsilon = \sphericalangle BCE,$$

adică, *patrulaterul* A B C D *este inscriptibil.*

Consecinţă. Dacă în relaţia (2), care se mai poate scri

$$|x+y||y+z|e^{i(\alpha+\beta)} =$$

$$e^{i(\delta+\varepsilon)}[|x||z|e^{i(\gamma-\delta-\varepsilon)}+|y|x+y+z|]$$

trecem la patratul modulelor, avem

$$|x+y|^2|y+z|^2 = [|x||z|\cos|\gamma-\delta-\varepsilon|+|y||x+y+z|]^2+$$

$$[|x|^2|y|^2\sin^2|\gamma-\delta-\varepsilon|] = [|x||z|+|y||x+y+z|]^2 -$$

$$4|x||y||z||x+y+z|\sin^2\frac{\gamma-\delta-\varepsilon}{2}.$$

De aci deducem

$$\boxed{|x+y||y+z| \leq |x||z|+|y||x+y+z|}, \tag{7}$$

Această relaţie se traduce prin următorul enunţ, de altfel cunoscut:

Într'un patrulater convex, produsul diagonalelor este mai mic de cât suma produselor laturilor opuse; semnul egal având loc numai în cazul

$$\gamma = \delta + \varepsilon \qquad [\text{relaţia (3)}],$$

adică numai în cazul patrulaterului inscriptibil şi avem în acest *caz teorema lui Ptolomeu.*

V. ALACI

16. — *Soluţia unei probleme a D-lui Prof. Pompeiu.*

Rugând pe D-l Prof. *Angheluţă* să soluţioneze problema din articolul D-lui Prof. *Pompeiu* din N-rul prezent, D-sa a dat următoarea soluţie, stabilind tot pe aceiaşi cale şi propoziţia reciprocă, de altfel cunoscută [1].

1. Fie patrulaterul convex A B C D (fig. din nota precedentă), axa A B şi numerele complexe x, y, z, $x+y+z$, $x+y$, $y+z$ corespunzând laturilor şi diagonalelor, numere care în funcţie de *module* şi *argumente* se pot scrie

$$x = a, \quad y = be^{i\delta}, \quad z = ce^{i\gamma}, \quad x+y+z = de^{i\varepsilon},$$

$$x+y = De^{i\alpha}, \quad y+z = D_1 e^{i\beta}, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

unde *modulele* şi *argumentele* se observă uşor pe figură.

În virtutea acestor expresii, relaţia (2) din articolul D-lui Prof. *Pompeiu*, devine:

$$\frac{D}{D_1}e^{i(\alpha-\beta)} \equiv \frac{bce^{i(\delta+\gamma)}+ade^{i\varepsilon}}{abe^{i\delta}+cde^{i(\gamma+\varepsilon)}} =$$

$$e^{i(\varepsilon-\delta)}\frac{bce^{i(\gamma+\delta-\varepsilon)}+ad}{ab+cde^{i(\gamma+\varepsilon-\delta)}}. \tag{1}$$

Trecând la patratul modulelor, avem

$$\frac{D^2}{D_1^2} = \frac{[bc\cos(\gamma+\delta-\varepsilon)+ad]^2+b^2c^2\sin^2(\gamma+\delta-\varepsilon)}{[ab+cd\cos(\gamma+\varepsilon-\delta)]^2+c^2d^2\sin^2(\gamma+\varepsilon-\delta)} \tag{2}$$

$$= \frac{(bc+ad)^2-4abcd\sin\frac{\gamma+\delta-\varepsilon}{2}}{(ab+cd)^2-4abcd\sin\frac{\gamma+\varepsilon-\delta}{2}}.$$

Această relaţie există prin urmare în orice patrulater convex A B C D.

Dacă presupunem însă că patrulaterul considerat A B C D este inscriptibil, atunci din figură rezultă

$$\gamma = \delta + \varepsilon$$

şi relaţia (2) devine

$$\frac{D^2}{D_1^2} = \frac{(bc+ad)^2-4abcd\sin^2\delta}{(ab+cd)^2-4abcd\sin^2\varepsilon}. \tag{3}$$

De altă parte, patrulaterul A B C D fiind presupus înscriptibil, suprafaţa sa S este dată de expresiile

$$S = \frac{(ab+cd)\sin\delta}{2} = \frac{(bc+ad)\sin\varepsilon}{2},$$

[1] *E. Rouché* et *Ch. Comberousse.* Géométrie plane, p. 158.

de unde

$$\frac{4abcd\sin^2\delta}{(bc+ad)^2}=\frac{4abcd\sin^2\varepsilon}{(ab+cd)^2}=k,$$

astfel că relaţia (3) se reduce la

$$\boxed{\frac{D}{D_1}=\frac{bc+ad}{ab+cd}}. \tag{4}$$

Prin urmare, condiţia de inscriptibilitate a patrulaterului A B C D *a atras existenţa relaţiei* (4), *identică cu relaţia* (3) *din articolul D-lui Prof. Pompeiu, răspunzându-se astfel întrebării puse.*

Reciproc. Să presupunem că într'un patrulater convex A B C D, relaţia (4) este satisfăcută şi în acest caz să arătăm că patrulaterul considerat este inscriptibil.

În adevăr, relaţia (2) din nota precedentă, cu notaţiile din această notă se poate scri

$$D\,D_1\,e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i(\delta+\varepsilon)}\,[ac\,e^{i(\gamma-\delta-\varepsilon)}+bd]$$

şi trecând la patratele modulelor, obţinem

$$D^2\,D_1^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(B+D), \tag{5}$$

fiindcă din figură

$$\gamma-\delta-\varepsilon=A+D-(\pi-B)-A=B+D-\pi,$$

unde B, D sunt unghiurile corespunzătoare patrulaterului.

De altă parte avem încă din figură

$$D^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D. \tag{6}$$

Între ecuaţiile (5) şi (6) eliminând unghiurile B şi D, găsim o ecuaţie de forma

$$f(D,\,D_1)=0. \tag{7}$$

Vom însemna cu D şi D_1 diagonalele patrulaterului inscriptibil cu laturile a, b, c, d şi să considerăm sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{u}{v}=\dfrac{bc+ad}{ab+cd}\\ f(u,v)=0,\end{cases}\quad\text{sau}\quad\begin{cases}\dfrac{u}{v}=\dfrac{bc+ad}{ab+cd}\\ \varphi(v)=0,\end{cases} \tag{8}\ (9)$$

unde $\varphi(v)$ [2] $=0$ s-a obţinut eliminând pe u din sistemul (8).

[2]) Ecuaţia $\varphi(v)=0$ este:

$$k(k+1)v^6-k(a^2+b^2+c^2+d^2)v^4+$$
$$[k(a^2-d^2)(b^2-c^2)-(a^2-b^2)(c^2-d^2)]v^2+$$
$$(a^2c^2-b^2d^2)(a^2-b^2+c^2-d^2)=0,$$

unde

$$k=\left(\frac{bc+ad}{ab+cd}\right)^2.$$

Sistemul (9) are evident soluţia

$$\begin{cases}u=D\\ v=D_1,\end{cases} \tag{9'}$$

căci patrulaterul inscriptibil de laturi a, b, c, d satisface ecuaţia (4) dată prin ipoteză, precum şi ecuaţia (7), deci sistemul (9).

Afirmăm că sistemul (9) are din punct de vedere geometric, singurul sistem de soluţii (9').

În adevăr, fie $v_1\neq D_1$ o soluţie a ecuaţiei $\varphi(v)=0$ şi să presupunem $v_1>D_1$.

În patrulaterul $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ cu laturile date şi diagonala v_1, unghiurile A_1 şi C_1 sunt respectiv mai mari ca unghiurile A, C din patrulaterul inscriptibil; atunci cealaltă diagonală $A_1\,C_1$ este mai mică de cât A C, căci în caz contrar ar urma ca unghiurile B_1 şi D_1 să fie respectiv mai mari ca acelea din B şi D, ceea ce este absurd.

Avem dar $v_1>D_1$, $u_1=A_1\,C_1<D$ şi prin urmare având

$$\frac{u_1}{v_1}<\frac{D}{D_1},$$

patrulaterul $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$, nu este inscriptibil, nesatisfăcând relaţia (4)

Aceiaşi concluzie dacă am presupune $v_1<D_1$.

Rezultă dar că sistemul (9) este satisfăcut numai de patrulaterul inscriptibil, că prin urmare relaţia (4) este caracteristică pentru acest patrulater.

V. A.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVII, No. 11, Iulie 1942. Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plauţius Andronescu*. Matematicele în Şcolile din Blaj, de *Victor Marian*. Raportul comisiunii pentru decernarea premiului de Geometrie elementară „*Gh. Ţiţeica*", de *Al Bunescu*, Ing. *D. Stoica*, *O. N. Ţino*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Luigi Amerio*. Sul prolungamento analitico delle funzioni armoniche. (Publicazioni dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma 1942)

3. *N. Abramescu*. Nouvelle méthode pour obtenir la cubique qui donne les tangentes de *Darboux* en un point d'une surface. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1939).

4 *N. Abramescu*. Sur les sections d'une surface par des plans menés par une tangente, ou par une droite passant par un point de la surface (Mathematica, Vol. XVIII, 1942).

5. *N. Abramescu*. Sur les tangentes de *Darboux* d'une surface. (Annales scientifiqués de l'Université de Iassy, t. XXVII, 1941).

6 *N. Abramescu* Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană. (Extras din „Gazeta Matematică, 1940).

7. *N. Abramescu.* Asupra deplasării elicoidale. (Extras din „R. M. T.", 1941.)

8 *N. Abramescu.* Asupra relaţiei dintre involutie şi fascicolele de cercuri. (Extras dln „R. M. T.", 1941).

9. *G. G. Constantinescu* Transformations genre *Laplace* (Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, 1938).

10. *G. G. Constantinescu.* Sur la flexion des pièces droits. (Idem, 1935—1936.)

11. *G. G. Constantinescu.* Sur le critère de *M. Pompeiu* pour l'intégrabilité par quadratures de l'équation de *Riccati.* (Académie Roumaine, Bull. de Section Scientifique, t. XXIV).

12. *G. G. Constantinescu.* Sur les intégrales de certaines classes d'équations différentielles lineaires. (Académie Roumaine, Bull. de Section Scientifique, t. XXIV).

13. *G. G. Constantinescu.* Asupra unei teoreme a D-lui *Pompeiu.* (Extras din Pitagora, Vol. V).

14. *G. G. Constantinescu.* Asupra unor curbe. (Pitagora, Vol. V, 3.)

15. *G. G. Constantinescu.* Asupra unor teoreme de Geometrie.

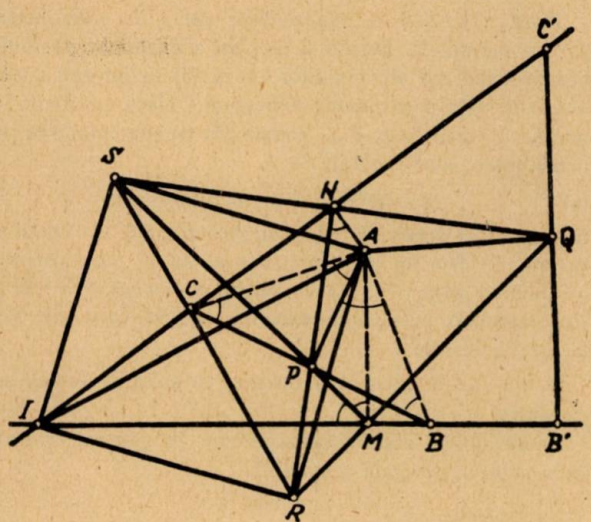
16. *G. G. Constantinescu.* Asupra împărţirei Polinoamelor. (Pozitiva, an I).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 851. — *Se dă în plan un punct* A *şi două drepte. Să se găsească un punct* P *astfel ca ducând prin el o dreaptă perpendiculară pe* AP, *care taie dreptele date în* B *şi* C *să avem*

$$AP = BP = CP.$$

P. TROFIMOV.



Fie M şi N proiecţia lui A pe dreptele date, care se întâlnesc în I. Din relaţiunile între mediana şi înălţimea AP şi jumătatea laturei BC a triunghiului BAC, rezultă că acest triunghiu este dreptunghic isoscel. Deci

$$\sphericalangle PCA = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PAC = \sphericalangle PAB = 45^0.$$

Cum patrulaterul ANCP are două unghiuri opuse drepte, urmează că el este înscriptibil, deci

$$\sphericalangle CNP = \sphericalangle CAP = 45^0$$

şi

$$\sphericalangle PNA = \sphericalangle CAP = 45^0.$$

Deci NP este bisectoarea unghiului INA. La fel MP este bisectoarea unghiului IMA. Prin urmare punctul căutat se află la intersecţia a două din bisectoarele unghiurilor din N şi M. Obţinem 4 astfel de puncte P, Q, R, S. Pentru P şi Q avem dreptele BC şi B′C′. Pentru R şi S punctele B şi C se confundă în I şi avem

$$\overline{RI} = \overline{IR} = \overline{AR} \quad \text{şi} \quad \overline{SI} = \overline{IS} = \overline{AS}.$$

Bună soluţie analoagă dela d-l. *Coşniţă C.*

D-l. *N. N. Mihăileanu*, la data de 19 Sept. 1931 a trimiş o bună soluţie analitică.

Gh B.

Problema 1612. *Avem*

$$432 + 576 + 720 = 12^3,$$
$$432^3 + 576^3 + 720^3 = 864^2.$$

Cum se obţin soluţiile generale ale sistemului

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \cdots + A_s = B^n \\ A_1^n + A_2^n + \cdots + A_s^n = C^n! \end{cases}$$

A. MOESSNER

Soluţii date de *Johannes Mahrenholz.*

Considerăm sistemul particular

$$(1) \qquad \begin{cases} x + y + z = A^3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = B^3. \end{cases}$$

1°. Avem

$$(2) \qquad \begin{cases} x = rp(p^3 - 2q^3), \\ y = rq(2p^3 - q^3), \\ z = rq(p^3 + q^3), \\ A = r,\ B = rp(p^3 + q^3), \end{cases}$$

unde

$$(3) \qquad p^4 + 3p^3q - 2pq^3 = r^2.$$

De exemplu, pentru $p = 2$, $q = 1$, $r = 6$, avem

$$72 + 54 + 90 = 6^3, \quad 72^3 + 54^3 + 90^3 = 108^3.$$

2°. Avem

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a^2 r p (p^3 - 2q^3), \\ y = a^2 r q (2p^3 - q^3, \\ z = a^2 r q (p^3 + q^3), \\ A = ar, \quad B = a^2 r p (p^3 + q^3), \end{cases}$$

unde

$$(5)\qquad p^4 + 3p^3 q - 2pq^3 = ar^2.$$

Astfel, la sistemele de valori

p	1	2	4	3	3
q	2	−1	−1	−1	1
a	−1	−4	2	6	39
r	3	1	6	1	2

corespund

x	−45	−272	−387	−1980	85176
y	−36	−112	−189	−136	161226
z	54	320	792	3132	228150
A	−3	−4	6	6	78
B	24	224	756	2808	257528

3°. Dacă $p = \alpha^2$, $q = 2\alpha\beta + \beta^2$, avem

$$\begin{cases} x = p(p^3 - 2q^3)(p^2 + 2pq - 2q^2)^2 (a^2 + \alpha\beta), \\ y = q(2p^3 - q^3)(p^2 + 2pq - 2q^2)^2 (\alpha^2 + \alpha\beta), \\ z = q(p^3 + q^3)(p^2 + 2pq - 2q^2)^2 (\alpha^2 + \alpha\beta,) \\ A = (p^2 + 2pq - 2q^2)(\alpha^2 + \alpha\beta), \\ B = p(p^3 + q^3)(p^3 + 2pq - 2q^2)^2 (\alpha^2 + \alpha\beta). \end{cases}$$

Pentru $\alpha = 2$, $\beta = 1$: $p = 4$, $q = 5$, avem

$$-744 + 15 + 945 = 6^3, (-744)^3 + 15^3 + 945^3 = 756^3.$$

Pentru $\alpha = 1$, $\beta = 1$: $p = 1$, $q = 3$, avem

$$-18150 - 12826 + 20328 = (-22)^3,$$

$$(-18150)^3 + (-12826)^3 + 20328^3 = 6776^3.$$

4°. Dacă $p = \alpha^2 + 2\beta^2$, $q = 2\alpha\beta + 2\beta^2$, avem

$$\begin{cases} x = p^3 (p+q)^2 (p^3 - 2q^3)(\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\beta^2), \\ y = p^2 q (p+q)^2 (2p^3 - q^3)(\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\beta^2), \\ z = p^2 q (p+q)^3 (p^3 + q^3)(\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\beta^2), \\ A = p(p+q)(\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\beta^2), \\ B = p^3 (p^3 + q^3)(p+q)^2 (\alpha^2 + 2\alpha\beta - 2\beta^2). \end{cases}$$

Pentru $\alpha = \beta = 1$, avem $p = 3$, $q = 4$, deci

$$(-6363) + (-840) + (7644) = 21^3,$$

$$(-6363)^3 + (-840)^3 + (7644)^3 = 5733^3.$$

Pentru $\alpha = 2$, $\beta = -1$, avem $p = 6$, $q = -2$, deci

$$(-3132) + 936 + 1980 = (-6)^3,$$

$$(-3132)^3 + 936^3 + 1980^3 = (-2808)^3.$$

Pentru $\alpha = 5$, $\beta = 1$, avem $p = 27$, $q = 12$, deci

$$17690244 + 20469449 + 31097352 = 3861^3.$$

$$17690244^3 + 20469449^3 + 31097352^3 = 1474187^3.$$

5°. Sistemul

$$x + y + y = A^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = B^2$$

are soluțiile

$$\begin{cases} x = \alpha^4 + 2\alpha\beta^3, \\ y = 2\alpha^3\beta + \beta^4, \\ z = 3\alpha^2\beta^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \\ B = \alpha^6 + 7\alpha^3\beta^3 + \beta^6. \end{cases}$$

6°. Sistemul

$$x + y + z = A^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = B^3$$

are soluțiile

$$\begin{cases} x = 2\alpha(13\alpha^2 + 9\alpha\beta + 3\beta^3), \\ y = 2\beta(3\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2), \\ z = -2(9\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + \beta^3), \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 2\alpha \\ B = 2(5\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2. \end{cases}$$

Notă 1°. D-l *J. Mahrenholz* nu a dat demonstrații pentru formulele D-sale și nici nu a examinat posibilitățile de existență ale relațiilor (3) și (5) în întregi, a căror rezolvire este o problemă deosebită. Dacă admitem formulele (4) pentru x, y z, relația (5) trebue înlocuită prin următoarea, mai generală

$$(\alpha)\qquad a^2 r (p^4 + 3p^3 q - 2pq^4) = A^3,$$

în care dacă facem $a = 1$, dăm peste cazul 1°. De altfel, invers, 2° este un caz particular al lui 1°, căci revine la a înlocui r prin $a^2 r$, așa că putem să facem $a = 1$ în (α). Recomandăm rezolvarea ecuației (α), în care am făcut $a = 1$, în întregi.

2°. D-l *A. M.* nu a dovedit nici că soluțiile D-sale sunt generale.

Recomandăm rezolvirea problemei în general, pornind dela soluția generală a ecuației

$$x^3 + y^3 = u^3 + v^3,$$

care a fost dată de *Euler* și care este [1]

[1]) Vezi și *Gazeta Matematică*, v. XLV, p. 298.

$$\begin{cases} x = (a^3+3b^2)^2 - a + 3b, \\ y = -(a^2+3b^2)^2 + a + 3b, \\ u = (a^2+3b^2)(a+3b) - 1, \\ v = -(a^2+3b^2)(a-3b) + 1, \end{cases}$$

în care vom lua $z = -v$. Problema revine deci la rezolvarea în întregi a ecuației

$$(a^2+3b^2)(a-3b) + 6b - 1 = A^3$$

3°. Problema generală, în care cubul este înlocuit printr'o putere n, depășește cadrul unei probleme propuse și de altfel, nu cred că i se poată da soluția generală pentru orice n. Recomandăm totuș încercarea pentru anumite valori $n = 4, 5, 6$, etc.

M. G.

Problema 1660. — *Să se construiască un triunghiu oarecare* A B C *cunoscându-i triunghiul antimedial* $S_aS_bS_c$ *al triunghiului ortic* $H_aH_bH_c$.

EMANUEL J. SARULESTEANU.

Soluția. Fie T un triunghiu oarecare și T′ triunghiul ce se capătă unind mijloacele laturilor acestuia. Triunghiul T′ se numește *medial* pentru triunghiul T, iar T se numește *antimedial* pentru T′. Construcția lui T′ când cunoaștem pe T este imediată; iar când cunoaștem pe T′, T se construiește, ducând prin vârfurile lui T′ paralele la laturile opuse.

Așadar în cazul problemei de față, din triunghiul $S_aS_bS_c$, deducem imediat triunghiul ortic $H_aH_bH_c$. Odată cunoscut triunghiul ortic, construcția lui A B C este cunoscută și se bazează pe faptul că înălțimile lui A B C sunt bisectoare pentru triunghiul ortic $H_aH_bH_c$. In consecință, intersecțiile bisectoarelor exterioare ne dau chiar triunghiul A B C.

Observare. E bine să se știe că dacă notăm cu A′, B′, C′ a doua intersecție a înălțimilor triunghiului A B C cu cercul său circumscris, atunci laturile triunghiului $S_aS_bS_c$ sunt dreptele lui *Simson* ale punctelor A′, B′, C′ față de cercul A B C.

Soluții date de d-nii: *Anițescu N. N.*, *Popa D. Mircea* (Iași), *Rohr I. Alex.* (Iași), *Șerban C. C.* (Târgoviște), *Theodorescu N. Dorin* (Constanța) și *Turcu R. Sandu* (Iași).

Gh. Th. Gh.

Problema 1665. — *Să se stabilească relațiile*

$$\cos A + \cos B = \frac{r_c(h_c - r)}{R h_c} = \frac{r(h_c + r_c)}{R h_c},$$

$$\sin A + \sin B = \frac{S(h_c + r_c)}{R h_c r_c} = \frac{p(h_c - r)}{R h_c},$$

notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu.

MIREL D STOENESCU

Soluția. Să demonstrăm mai întâi egalitățile

$$\frac{r_c(h_c - r)}{R h_c} = \frac{r(h_c + r_c)}{R h_c}, \quad \frac{S(h_c + r_c)}{R h_c r_c} = \frac{p(h_c - r)}{R h_c},$$

cari, în baza relației: $S = pr$, se reduc la egalitatea

$$r_c(h_c - r) = r(h_c + r_c) \quad \text{**} \quad \frac{2}{h_c} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_c}$$

cunoscută. Se poate de altfel verifica ușor exprimând pe r, r_c, h_c în funcție de suprafață și de laturi, formule pe care le vom folosi mai jos.

Avem acum mai departe

$$\cos A + \cos B = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$= \frac{a(b^2-a^2)+b(a^2-b^2)+c^2(a+b)}{2abc}$$

$$= \frac{(a+b)(c+a-b)(c+b-a)}{2abc}$$

$$= 2\frac{(2p-c)(p-b)(p-a)}{abc}$$

$$= \frac{2S^2(2p-c)}{abcp(p-c)} = \frac{4S}{abc} \cdot \frac{S}{p} \frac{2(p-c)+c}{2(p-c)}$$

$$= \frac{r}{R}\left[1 + \frac{c}{2(p-c)}\right] = \frac{r}{R}\left(1 + \frac{S}{p-c} \cdot \frac{c}{2S}\right)$$

$$= \frac{r}{R}\left(1 + \frac{r_c}{h_c}\right) = \frac{r(h_c+r_c)}{R h_c},$$

ceiace justifică prima grupă de egalități.

Tot astfel,

$$\sin A + \sin B = \frac{2S}{bc} + \frac{2S}{ac} = \frac{2S}{abc}(2p-c)$$

$$= \frac{1}{2R}[2(p-c)+c)]$$

$$= \frac{S}{R}\left(\frac{p-c}{S} + \frac{c}{2S}\right) = \frac{S}{R}\left(\frac{1}{r_c} + \frac{1}{h_c}\right)$$

$$= \frac{S(h_c+r_c)}{R r_c h_c},$$

ceiace demonstrează și grupa a doua de egalități

Soluții dată de d-nii: *Bakonyi C.* (Timișoara), *Buznea D. D.* (Târgoviște), *Cetățeanu St.* (București), *Cristea I. N.*

(Blaj), *Dăscălescu Şt. H.* (Focşani), *Diaconescu D. I.* (T-Severin), *Dragon I. Gh.* (Bucureşti), *Gligor N. I.* (Arad), Sub-Lt. *Lupescu Gh.* (Roman), *Negrea A. M.* (Brăila), *Şerban I. C.* (Târgovişte) Sub-Lt. *Ştefănescu F. M.* (Alba-Iulia), *Suhăţeanu V. B.* (Târgovişte) şi *Venter D* (Beiuş).

Gh. Th. Gh.

PROBLEME PROPUSE

2058. — Se notează cu $N_5(a, b)$ un număr de 5 cifre, scris numai cu cifrele a şi b şi se cere să se găsească două astfel de numere între care există relaţiunea

$$N_5(a, b) = m\, N_5'(a, b),$$

m fiind un număr întreg.

G-L GH. BUICLIU

2059. — Să se determine λ aşa fel ca ecuaţia

$$x^3 - x^2 + \lambda = 0$$

să aibă toate rădăcinele reale şi raţionale.

M. CHERMANESCU

2060. — Se dă baza a şi înălţimea h a unui triunghiu dreptunghiu.

Să se calculeze latura patratului înscris în acest triunghiu şi având latura aplicată pe baza triunghiului.

În acest caz, să se arate că relaţia

$$R - \sqrt{2}\, r = R\,\frac{a-h}{a+h}$$

este adevărată, R şi r fiind respectiv raza cercului circumscris triunghiului dreptunghiu şi raza cercului circumscris patratului.

EUGEN I. SIPOS

2061. — Să se afle limita expresiei

$$y = \frac{1+\cos x - n^2\cos^{n-1}x + (2n^2-2n-1)\cos^n x - (n-1)^2\cos^{n+1}x}{(1-\cos x)^3}$$

pentru $x \to 0$. Interpretare.

ADRIAN I. POPESCU

2062. — Să se construiască curba a cărei ecuaţie în coordonate polare este

$$\varrho = a \sin\frac{3\omega}{2},$$

a fiind o constantă pozitivă.

EUGEN VISA

2063. — În unul din cadranele formate de axele rectangulare $x'x$, $y'y$ cu origina în O, se iau pe semi-axele corespunzătoare, respectiv, segmentele

$$OA = OA'.$$

Se duce din O o semidreaptă variabilă, care întâlneşte în M segmentul de dreaptă AA'.

Pe OA' se ia segmentul $ON = OM$, iar în N se ridică o perpendiculară pe AN, care întâlneşte pe $x'x$ în P. Se uneşte P cu A' şi în A' se ridică o perpendiculară pe PA', care întâlneşte în Q pe $x'x$.

Se cere locul geometric al punctului I, intersecţia lui OM cu paralela la AA' ce trece prin Q, când OM se roteşte în jurul lui O.

V. ALACI

2064. — Fiind dat un tetraedru, să se găsească un punct din spaţiu a cărui produs al distanţelor la cele patru planuri ale feţelor să fie cel mai mare. Discuţie.

V. THÉBAULT

2065. — Un mijloc de apărare contra submarinelor este mersul în zig-zag.

O navă navigă în felul următor. La ora 14 ia drum adevărat $D_a = 50^0$. După 20^m întoarce şi ia $D_a = 90^0$. În acest drum merge 15^m, apoi întoarce şi ia $D_a = 130^0$. În acest drum merge 40^m, apoi întoarce şi ia $D_a = 90^0$. Merge în acest drum 15^m, apoi întoarce şi ia $D_a = 50^0$. În acest drum merge 20^m. După acest timp ciclul se repetă. Viteza navei este de 12 Mile pe oră.

Raza de giraţie = 0,2 Mile.

Viteza în timpul întoarcerei scade la jumatate. Drumurile în navigaţie se socotesc de la N în senz retrograd.

Se cere: 1^0. Distanţa proectată pe paralelul punctului iniţial, la ora 19.

2^0. În ce direcţie se va vedea punctul iniţial la ora $23^h.56^m$.

CPT. C. V. COSTACHESCU

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Burghiu D. Ioan (2020, 2021, 2023, 2028, 2029, 2033, 2037). *Cârlan Nicu* (1887, 1907, 1946, 1953, 1970, 2018). *Gâţă G.* (P., 1922, 1923, 1947, 1956, 1962, 1971). *Georgescu Liliana* (2043, 2045). *Giurgiuman Traian* (2052, 2054). *Grigoriu N.* (2020, 2023, 2029, 2031). *Ieşan Şt. Alexandru* (2031, 2033, 2043, 2043, 2052). *Manolache C. Mircea* (P., 1928, 1999, 2028, 2030, 2038, 2041, 2045, 2047, 2048, 2052, 2054). *Mahrenholz Iohannes* (2020, 2021, 2023, 2025, 2028, 2030, 2037, 2041, 2045). *Moisă I. Gheorghe* (2018, 2029, 2036). *Popescu Adrian* (P., 1697, 1763, 1777, 1793, 1818, 1931, 1936, 2004, 2041, 2043, 2045). *Popescu Maria* (1927, 1931, 1949, 1956, 1967) *Rizescu Ion* (A., P.) *Sipos I. Eugen* (P., 1933, 1947, 1969, 1980, 2013, 2029, 2041). *Stefănescu Marin* (P., 2018, 2019, 2020, 2028, 2030, 2031, 2033, 2043, 2045, 2048). *Tarălungă Savel* (P., 1887, 1892, 1907, 1953, 1970, 2018). *Vasiliu A. B.* (1837, 1842, 1848, 1859, 2018, 2020, 2021, 2023, 2028, 2030, 2034, 2036, 2038, 2041, 2043, 2052, 2057). *Wegener Eugen* (1667, 1668, 1676, 1693, 1741, 1853, 1858, 1859, 1866, 1868, 1869, 1875, 1878, 1902, 1906, 1907, 1911, 1915, 1928, 1931, 1953, 1960, 1965, 1996, 2004, 2036, 2037, 2045, 2047, 2050, 2052, 1054).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés.

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XX, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XX, cu preţul de lei 200 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebue să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însotesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXII. SEPTEMVRIE 1942 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

BIBLIOTECA CENTR. ASOCIAȚIUNEA SIBIIU

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: RELATIUNI METRICE INTR'UN TRIUNGHIU.

2. **V. ALACI**: UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE" (URMARE).

3. NOTE MATEMATICE: 17.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 1280, 1322, 1407, 1419, 1899, 1902.

6. PROBLEME PROPUSE: 2066 – 2073.

7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — No. 7 TIMISOARA, SEPTEMVRIE 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

RELAȚIUNI METRICE ÎNTR'UN TRIUNGHIU

DE V ALACI.

Noțiunea de *latură-vector* asociată cu aceea de *număr complex corespunzător,* au fost folosite în mod ingenios de D-nul Prof. *Pompeiu* în articolul D-sale *„O observare asupra patrulaterului convex și o problemă“* [1].

Utilizând aceleași noțiuni, am demonstrat în *Nota matematică* [2] 15, teorema lui *Ptolemeu* și reciproca ei, iar D-nul Prof. *Angheluță* a soluționat problema D-lui Prof. *Pompeiu* din articolul menționat și reciproca ei, în *Nota* 16 [3].

În cele ce urmează și în lumina celor *două noțiuni asociate,* vom stabili *relațiunile metrice-clasice – precum și altele –* ce există între elementele unui triunghiu.

Credem că sub forma ce o vom prezenta, aceste chestiuni, vor putea fi predate cu succes elevilor de liceu.

I.

1. Fie A B C un triunghiu cu laturile orientate și x, y *numere complexe* ce corespund *laturilor-vectori* A B, B C. [4]

Atunci, *latura-vector* A C este reprezentată, evident, prin *numărul complex* $(x+y)$.

Acum, considerăm identitatea

$$(1) \qquad (x+y)=x+y,$$

iar numerele complexe $(x+y)$, x, y să le exprimăm în funcție de *modul* și *argument,* observând că *modulele* sunt chiar lungimele laturilor, adică b, c, a.

Alegând A B ca axă și observând pe figură, (fig. 1) *argumentele*, putem scri:

$$(2) \quad (x+y)=b\,e^{iA}, \quad x=c, \quad y=a\,e^{i(\pi-B)}=-a\,e^{-iB}, \quad (i=\sqrt{-1}).$$

În virtutea acestor relații, identitatea (1) devine

$$(3) \qquad b\,e^{iA}=c-a\,e^{-iB}.$$

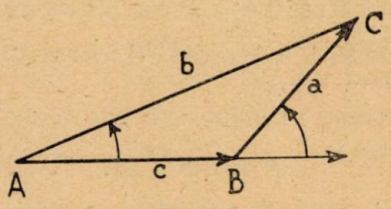


Fig. 1.

Egalând părțile reale și coeficienții părților imaginare, apoi egalând patratele *modulelor* ambilor membri, obținem respectiv

$$b\cos A=c-a\cos B, \quad b\sin A=a\sin B,$$

$$b^2=(c-a\cos B)^2+a^2\sin^2 B.$$

Aceste relații se mai pot scri încă

$$(4) \qquad \boxed{c=b\cos A+a\cos B}, \quad \boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}},$$

$$\boxed{b^2=a^2+c^2-2ac\cos B}.$$

Avem stabilite astfel, în mod simplu, relațiile fundamentale într'un triunghiu, cunoscute respectiv sub numele de *teorema cosinusului, teorema sinusului* și *teorema lui Pitagora generalizată.*

2. Alte relații. Multiplicăm relația (3) cu e^{iA}, avem

---

[1]) „R. M. T.“, An. XXII, No. 6, p. 67.
[2]) „ „ „ „ 6, p. 72.
[3]) „ „ „ „ 6, p. 73.
[4]) Dacă A și B sunt două puncte de afixe x_1, x_2 atunci *numărul complex* x_2-x_1, reprezintă în mărime și direcție, segmentul A B.

$$b\,e^{2\,i\,A} = c\,e^{i\,A} - a\,e^{i\,(A-B)}$$

şi egalăm părţile reale şi imaginare, obţinem relaţiile:

$$(5)\qquad \boxed{\begin{aligned} b\cos 2A &= c\cos A - a\cos(A-B)\\ b\sin 2A &= c\sin A - a\sin(A-B)\end{aligned}}\,.$$

3. Considerăm identitatea

$$(6)\qquad x^2 = (x+y)^2 - y^2 - 2xy,$$

unde x, $(x+y)$, y sunt *numere complexe,* care reprezintă respectiv *laturile-vectori* c, b, a ale triunghiului ABC, (fig. 1).

Ţinând seamă de expresiile (2), identitatea (6) devine

$$(7)\qquad c^2 = b^2 e^{2\,i\,A} - a^2 e^{-2\,i\,B} + 2\,a\,c\,e^{-i\,B}$$

şi egalând părţile reale şi imaginare, obţinem relaţiile

$$(8)\qquad \boxed{\begin{aligned} c^2 &= b^2\cos 2A - a^2\cos 2B + 2\,a\,c\cos B\\ b^2\sin 2A &+ a^2\sin 2B = 2\,a\,c\sin B\end{aligned}}\,.$$

Apoi, scriind identitatea (7) sub forma

$$b^2 e^{2\,i\,A} - c^2 = a\,e^{-i\,B}(a\,e^{-i\,B} - 2c)$$

şi egalând patratele modulelor ambilor membri, putem scri succesiv, având în vedere şi prima din relaţiile (4):

$$b^4 + c^4 - 2\,b^2 c^2\cos 2A = a^2(a^2 + 4c^2 - 4\,a\,c\cos B)$$
$$= a^4 + 4\,a^2 c\,(c - a\cos B) = a^4 + 4\,a^2 b\,c\cos A.$$

De aci deducem relaţia remarcabilă

$$(9)\qquad \boxed{b^4 + c^4 - a^4 - 2\,b^2 c^2\cos 2A = 4\,a^2 b\,c\cos A}\,.$$

4. Considerăm identitatea

$$(10)\qquad x^3 = (x+y)^3 - y^3 - 3\,x\,y\,(x+y),$$

unde x, $(x+y)$, y sunt *numere complexe,* care reprezintă *laturile-vectori* c, b, a ale triunghiului ABC, (fig. 1).

Ţinând seamă de expresiile (2), identitatea (10) devine

$$(11)\qquad c^3 = b^3 e^{3\,i\,A} + a^3 e^{-3\,i\,B} + 3\,a\,b\,c\;e^{i\,(A-B)}$$

şi egalând părţile reale şi imaginare, obţinem relaţiile remarcabile

$$(12)\qquad \boxed{\begin{aligned} c^3 &= b^3\cos 3A + a^3\cos 3B + 3\,abc\cos(A-B)\\ b^3\sin 3A &- a^3\sin 3B + 3\,a\,b\,c\sin(A-B) = 0\end{aligned}}\,.$$

Apoi, scriind identitatea (11) sub forma

$$c^3 - 3\,a\,b\,c\;e^{i\,(A-B)} = e^{-3\,i\,B}\left[a^3 + b^3 e^{3\,i\,(A+B)}\right]$$

şi egalând patratele modulelor ambilor membri, avem

$$c^6 + 9\,a^2 b^2 c^2 - 6\,a\,b\,c^4\cos(A-B) =$$
$$a^6 + b^6 + 2\,a^3 b^3\cos 3(A+B),$$

sau

$$(13)\qquad \boxed{\begin{aligned} &a^6 + b^6 - c^6 - 9\,a^2 b^2 c^2 =\\ &2\,a\,b\,[a^2 b^2\cos 3C - 3\,c^4\cos(A-B)]\end{aligned}}\,,$$

care este o relaţie remarcabilă.

II.

5. Fie iarăşi ABC un triunghiu orientat şi $AM = m$ o mediană, iar x, y *numere complexe corespunzătoare* lui AM, MC considerate ca *vectori.* Atunci, *laturile-vectori* AC şi AB sunt reprezentate, evident, prin *numerele complexe* $(x+y)$, $(x-y)$.

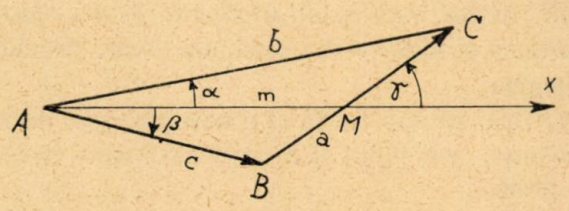


Fig. 2.

Acum, considerăm identităţile evidente

$$(14)\qquad \begin{aligned}(x+y) + (x-y) &= 2x\\ (x+y) - (x-y) &= 2y\end{aligned}$$

şi *numerile complexe* $(x+y)$, $(x-y)$, x, y să le exprimăm în funcţie de *module* şi *argumente,* observând că b, c, m, $\frac{a}{2}$ sunt respectiv *modulele* lor.

Alegând AMX ca axă şi observând pe figură (fig. 2) *argumentele,* putem scri

$$(15)\qquad x+y = b\,e^{i\,\alpha},\quad x-y = c\,e^{-i\,\beta},\quad x = m,\quad y = \frac{a}{2}e^{i\,\gamma},$$

unde

$\alpha = \sphericalangle XAC, \quad \beta = \sphericalangle XAB, \quad \gamma = \sphericalangle XMC.$

În virtutea relațiilor (15), identitățile (14) devin

$$(16) \qquad \begin{aligned} b\,e^{i\alpha} + c\,e^{-i\beta} &= 2m \\ b\,e^{i\alpha} - c\,e^{-i\beta} &= a\,e^{i\gamma}. \end{aligned}$$

Egalând, în fiecare din aceste identități, părțile reale și imaginare, obținem relațiile:

$$(17) \qquad \boxed{\begin{aligned} b\cos\alpha + c\cos\beta &= 2m \\ b\sin\alpha &= c\sin\beta \end{aligned}},$$

$$(18) \qquad \boxed{\begin{aligned} b\cos\alpha - c\cos\beta &= a\cos\gamma \\ b\sin\alpha + c\sin\beta &= a\sin\gamma \end{aligned}}.$$

De asemeni, fiindcă $\alpha + \beta = A$, identitățile (16) se mai pot scri

$$\begin{aligned} b\,e^{iA} + c &= 2m\,e^{i\beta} \\ b\,e^{iA} - c &= a\,e^{i(\gamma+\beta)} \end{aligned}$$

și egalând patratele modulelor, obținem relațiile cunoscute

$$(19) \qquad \boxed{\begin{aligned} b^2 + c^2 + 2bc\cos A &= 4m^2 \\ b^2 + c^2 - 2bc\cos A &= a^2 \end{aligned}},$$

deci și

$$(20) \qquad \boxed{b^2 + c^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

6. Păstrând același triunghiu ABC (fig. 2) și aceleași notații, să considerăm identitățile evidente

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2, \quad (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy,$$
$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2),$$
$$(x+y)^3 - (x-y)^3 = 2y(3x^2 + y^2).$$

Aceste identități, în baza relațiilor (15), devin respectiv

$$bc\,e^{i(\alpha-\beta)} = m^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 e^{2i\gamma},$$

$$b^2 e^{2i\alpha} - c^2 e^{-2i\beta} = 2am\,e^{i\gamma},$$

$$b^2 e^{2i\alpha} + c^2 e^{-2i\beta} = 2\left[m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 e^{2i\gamma}\right],$$

$$b^3 e^{3i\alpha} - c^3 e^{-3i\beta} = a\,e^{i\gamma}\left[3m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 e^{2i\gamma}\right].$$

Egalând pe rând, în fiecare din aceste identități, părțile reale și imaginare, precum și patratele *modulelor* ambilor membri, obținem respectiv relațiile remarcabile:

$$(21) \qquad \boxed{\begin{aligned} 4bc\cos(\alpha-\beta) + a^2\cos 2\gamma &= 4m^2 \\ 4bc\sin(\alpha-\beta) + a^2\sin 2\gamma &= 0 \\ a^4 + 16(m^4 - b^2c^2) &= 8a^2m^2\cos 2\gamma \end{aligned}},$$

$$(22) \qquad \boxed{\begin{aligned} b^2\cos 2\alpha - c^2\cos 2\beta &= 2am\cos\gamma \\ b^2\sin 2\alpha + c^2\sin 2\beta &= 2am\sin\gamma \\ b^4 + c^4 - 2b^2c^2\cos 2A &= 4a^2m^2 \end{aligned}},$$

$$(23) \qquad \boxed{\begin{aligned} 2(b^2\cos 2\alpha + c^2\cos 2\beta) - a^2\cos 2\gamma &= 4m^2 \\ 2(b^2\sin 2\alpha - c^2\sin 2\beta) - a^2\sin 2\gamma &= 0 \\ 4(b^4 + c^4 - 4m^4) + 8b^2c^2\cos 2A = \\ a^4 + 2a^2m^2\cos 2\gamma \end{aligned}},$$

$$(24) \qquad \boxed{\begin{aligned} 4(b^3\cos 3\alpha - c^3\cos 3\beta) - a^3\cos 3\gamma &= 12am^2\cos\gamma \\ 4(b^3\sin 3\alpha - c^3\sin 3\beta) - a^3\sin 3\gamma &= 12am^2\sin\gamma \\ 16(b^6 + c^6 - 9a^2m^4 - 2b^3c^3\cos 3A) = \\ a^4(a^2 + 24m^2\cos 2\gamma) \end{aligned}}.$$

Analog, putem stabili și alte relații. De asemeni, în fig. 2, am putea înlocui mediana AM, cu bisectoarea, înălțimea sau alt element linear spre a obține și alte relații, iar cu alt prilej vom reveni.

Avem astfel o metodă unitară, simplă, pentru obținerea unei întregi clase de relații remarcabile între elementele unui triunghiu.

Unele dintre relațiile ce le-am obținut, le vom propune ca probleme, pentru a fi stabilite pe cale directă.

UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE"

DE

V. ALACI.

(urmare)

Alte câteva configurații în coordonate ortorombice.

44. Vom studia tot sub formă de probleme, încă câteva *ecuații ortorombice*, care reprezintă simultan *conici* și *drepte*, sau părți din ele.

Vom vedea cu acest prilej noui construcții prin puncte ale *conicelor*.

45. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică*

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}. \tag{113}$$

Prima soluție. Configurația (113) este simetrică — într'un sistem de axe rectangulare — față de axe și origina lor, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi + \theta$, r rămâne același.

Vom construi dar configurația (113), întâiu, în primul cadran și apoi o vom întregi cu simetricele ei față de axe și origina lor.

În acest scop efectuăm următoarea construcție, prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *ducem din origina* O — *în primul cadran* — *o semidreaptă variabilă pe care luăm segmentul* $OA = a$ *și în* A *ridicăm o perpendiculară care întâlnește pe* Ox *în* M. *Unim* M *cu punctul* N *de pe* OA, *luat astfel ca* $NA = b$.

Mai departe, luăm pe OA *segmentul* $OC = MN$, *unim* C *cu punctul* B *de pe* Ox ($OB = b$) *și prin* A *ducem o paralelă la* CB, *care întâlnește în* P *pe* Ox.

Intersecția I *a lui* OA *cu perpendiculara în* P *pe* Ox, *aparține configurației* (113), (fig. 36).

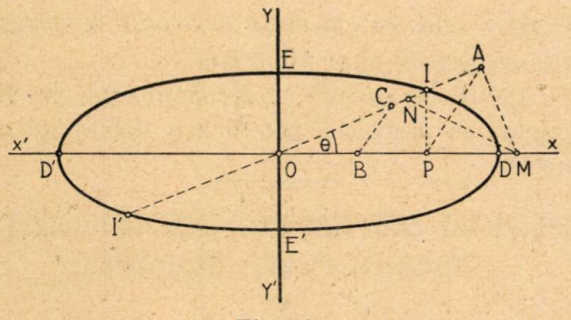


Fig. 36.

În adevăr, însemnând

$$OP = r, \qquad \sphericalangle xOI = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului I, din triunghiurile dreptunghice OAM, MAN, avem respectiv

$$AM = OA \operatorname{tg} \theta = a \operatorname{tg} \theta,$$

$$\overline{MN}^2 = \overline{NA}^2 + \overline{AM}^2 = b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Apoi, din triunghiurile asemeni OAP, OCB, rezultă

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OC}$$

și ridicând la patrat, deducem

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta},$$

tocmai ecuația (113). Punctul I a fost astfel bine determinat.

Variind θ în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$ avem alte puncte analoage lui I, iar privind ecuația (113), putem forma următorul tablou de variație,

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	a	$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$	0

ceeace ne permite a afirma că: *În primul cadran, configurația* (113) *este formată din ramura* DIE *și semi-drepta* Oy. *Prin urmare, întreaga configurație* (113) *este reprezentată prin curba închisă* DED'E'D *și prin axa* $y'y$.

Ce fel de curbă închisă este DED'E'D?

Răspunsul îl vom vedea în soluția 2-a.

Soluția 2-a. Transpunând în *coordonate carteziene* ecuația (113), în virtutea formulelor de transformare (9'), avem

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 x^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2},$$

care se descompune în

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases} \tag{113'}$$

Aceasta înseamnă că: *Configurația* (113) *este formată din axa* $y'y$, *precum și elipsa din* (113') DED'E'D, *a cărei construcție prin puncte este dată în prima soluție.*

Observare. Analog, se construește configurația de *ecuație ortorombică*

$$r = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}, \tag{114}$$

care e formată din axa $y'y$ și o elipsă ce trece prin origină.

46. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică*

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \theta}. \tag{115}$$

Prima soluție. Această configurație este simetrică — într'un sistem de axe rectangulare — față de axe și origina lor, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, sau $\pi + \theta$, r rămâne același.

Vom construi dar configurația (115), în primul cadran, căutând a satisface condiției,

$$\theta \leq \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad \text{(pentru ca să avem } r \geq 0) \tag{116}$$

și apoi vom întregi partea aflată cu simetricele ei față de axe și origina lor.

În acest scop efectuăm următoarea construcție prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *și în primul cadran, ducem din origina* O *o semi-dreaptă* Δ *de coeficient unghiular* $m = \operatorname{tg} \frac{b}{a}$ *și apoi o semi-dreaptă variabilă, care să nu treacă deasupra lui* Δ *și pe care luăm segmentul* $OA = a$. *În* A *ridicăm pe* OA *o perpendiculară care întâlnește în* M *pe* Ox. *Din* M, *cu o rază egală cu* b *tăiem pe* OA *în* N.

Mai departe, luăm pe OA *segmentul* $OC = NA$, *unim* C *cu un punct* B *de pe* Ox $(OB = b)$ *și prin* A *ducem o paralelă la* CB, *care întâlnește în* P *pe* Ox.

Intersecția I *a lui* OA *cu perpendiculara în* P *pe* Ox, *aparține configurației cerute,* (fig. 37).

În adevăr, însemnând,

$$OP = r, \qquad \sphericalangle xOI = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului I, din triunghiurile dreptunghice OAM, MAN, avem respectiv

$$AM = OA \operatorname{tg} \theta = a \operatorname{tg} \theta,$$

$$\overline{NA}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{AM}^2 = b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \theta.$$

Apoi, din triunghiurile asemeni OAP, OCB, rezultă

$$\frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OC}$$

și ridicând la patrat, deducem

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \theta},$$

tocmai ecuația (115). Punctul I a fost astfel bine determinat.

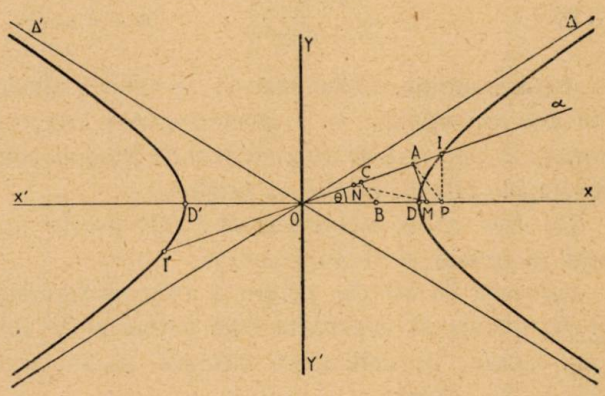


Fig. 37.

Variind θ în intervalul închis $(0, \operatorname{arctg} \frac{b}{a})$, avem alte puncte analoage lui I, iar privind ecuația (115), putem forma tabloul de variație

θ	0	$\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$
r	a	∞

,

de unde deducem că: *În primul cadran, configurația* (115) *este formată din ramura infinită* DI *asimptotă dreptei* Δ. *Prin urmare, întregind ramura infinită* DI *cu simetricele ei față de axe și origina lor, obținem întreaga configurație* (115).

Ce fel de curbă este configurația (115)? Răspunsul îl vom găsi în soluția 2-a.

Soluția 2-a. Transpunând în *coordonate carteziene* ecuația (115), în virtutea formulelor de transformare (9'), avem

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 x^2}{b^2 x^2 - a^2 y^2},$$

care se descompune în

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases} \tag{115'}$$

Dar, $x = 0$ este o soluție străină, căci, nu putem avea $r = 0 \, (a \leq r \leq \infty)$, astfel că: *Configurația*

(115) *este o iperbolă cu centru în origină şi semiaxele a, b.*

47. **Problemă.** *Se cere configuraţia de ecuaţie ortorombică*

$$(116) \qquad r = \frac{a\,b\,\mathrm{tg}\,\theta}{b + a\,\mathrm{tg}^2\,\theta}, \qquad (a > b > 0).$$

Prima soluţie. Observăm că — într'un sistem de axe rectangulare — r rămâne acelaşi, când înlocuim θ prin $\pi + \theta$, de unde rezultă simetria configuraţiei (116) în raport cu origina.

De altă parte, observăm că r este pozitiv numai în primul şi al 3-lea cadran.

Urmează de aci că, pentru a avea configuraţia (116), trebuie să construim întâi partea ei din primul cadran, pe care să o întregim cu simetrica ei faţă de origină.

În acest scop efectuăm următoarea construcţie prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *descrim în primul cadran două semicercuri de diametre* $OA = a$, $OB = b$ *(centrele* C_1, C_2 *fiind situate pe* Oy*) şi din* O *ducem o semidreaptă variabilă, care întâlneşte în* M *semicercul* C_1. *Unim* A *cu* M *şi fie* N *intersecţia dreptei* AM *cu* Ox.

Intersecţia I *a lui* OM *cu dreapta* BN, *aparţine configuraţiei cerute,* (fig. 38).

Pentru aceasta, fie I_1 proecţia lui I pe Ox şi notăm

$$OI_1 = r, \qquad \sphericalangle xOI = \theta$$

coordonatele ortorombice ale punctului I.

Din triunghiurile asemeni NOB, NI_1I, deducem

$$(117) \qquad \frac{OB}{I_1I} = \frac{ON}{ON - OI_1}.$$

Cum însă din triunghiurile dreptunghice OI_1I şi ONA, avem respectiv

$$I_1I = OI_1\,\mathrm{tg}\,\theta = r\,\mathrm{tg}\,\theta, \qquad ON = OA\,\mathrm{tg}\,\theta = a\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

relaţia (117) devine

$$\frac{b}{r\,\mathrm{tg}\,\theta} = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\theta}{a\,\mathrm{tg}\,\theta - r},$$

de unde

$$r = \frac{a\,b\,\mathrm{tg}\,\theta}{b + a\,\mathrm{tg}^2\,\theta},$$

tocmai ecuaţia (116). Punctul I a fost astfel bine determinat.

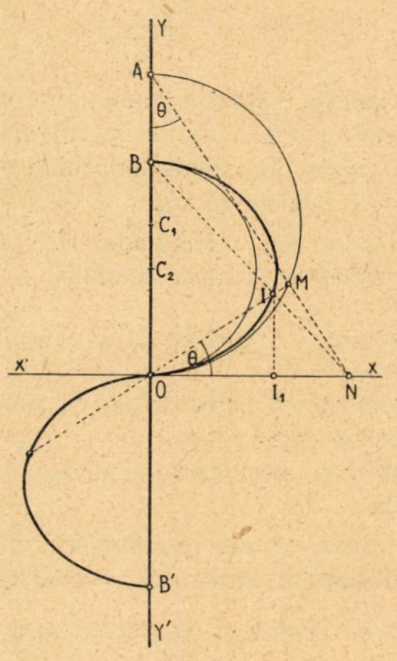


Fig. 38.

Variind θ în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$ obţinem alte puncte analoage lui I şi din tabloul

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\frac{ab}{a+b}$	0

deducem că: *În primul cadran, configuraţia* (116) *este formată de arcul* OIB, *precum şi din semiaxa* Oy. *Prin urmare, construind şi simetricele părţilor aflate în raport cu origina, avem în întregime configuraţia cerută.*

Ce fel de arc este OIB, o vom afla din soluţia 2-a.

Soluţia 2-a. Transpunând ecuaţia (116) în *coordonate carteziene*, în virtutea formulelor de transformare (9'), obţinem pentru primul cadran

$$x = \frac{a\,b\,x\,y}{b\,x^2 + a\,y^2},$$

ecuaţie, care se descompune în

$$(116') \qquad \begin{cases} x = 0 \\ b\,x^2 + a\,y^2 - a\,b\,y = 0. \end{cases}$$

Prima ecuație reprezintă axa y' y din care vom reține numai semiaxa O y, iar a 2-a ecuație din (116') *reprezintă o elipsă, cu centru în* C_2, *cu semi-axele* $\frac{\sqrt{a\,b}}{2}$, $\frac{b}{2}$ *paralele la* $x'x$, $y'y$, *iar din această elipsă trebuie să reținem numai semi-elipsa* O I B *din primul cadran. Completând partea construită cu simetrica ei față de origină, obținem aceiași configurație ca în prima soluție.*

48. **Problema.** *Se cere configurația de ecuație ortorombică*

(118) $$r = a\,sp\,\theta + b\,cp\,\theta, \qquad (b > a > 0).$$

Prima soluție. Vom observa întâi că r este pozitiv numai când θ variază în cadranele I, II, IV, respectiv în intervalele

(119) $$(0\,,\frac{\pi}{2}), \qquad \left[\frac{\pi}{2}\,,\,\mathrm{arctg}\,(-\frac{b}{a})\right],$$
$$\left[2\pi + \mathrm{arctg}\,(-\frac{b}{a})\,,\,2\pi\right].$$

Acum, pentru a construi prin puncte configurația (118), procedăm astfel:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *construim patratele auxileare* $A A_1 A'_1$, $B B_1 B'_1$ *cu vârfurile pe axe, de semi-diagonale* $OA = a$, $OB = b$ *și prin* O *ducem dreapta fixă* Δ *de coeficient unghiular* $m = \mathrm{tg}\,(-\frac{b}{a})$.

Ducem apoi din O *o semi-dreaptă variabilă* $O\alpha$, *care să nu fie situată sub dreapta fixă* Δ *și fie* M, N *punctele în care ea taie patratele construite, iar* M', N' *fie proecțiile lui* M, N *pe axa* $x'x$. *Evident că,*

$$M'M = a\,sp\,\theta, \qquad ON' = b\,cp\,\theta.$$

Dacă $O\alpha$ *a fost dusă în primul cadran, luăm pe* O x *segmentul* $OP = ON' + M'M$ *și intersecția* I *a lui* $O\alpha$ *cu perpendiculara în* P *pe* O x, *aparține configurației cerute.*

Dacă $O\alpha_1$ *este dusă în al 2-lea cadran, în intervalul corespunzător din* (119), *atunci evident că* $M'_1 M_1 = a\,sp\,\theta > 0$, $ON'_1 = b\,cp\,\theta < 0$ *și vom lua pe* Ox' *segmentul* $OP_1 = M'_1 M_1 - ON'_1$, *iar intersecția* J *a lui* $O\alpha$ *cu perpendiculara în* P_1 *pe* Ox', *aparține configurației cerute.*

În fine, dacă $O\alpha_2$ *este dusă în cadranul al 4-lea, în intervalul corespunzător din* (119), *atunci evident că* $M'_2 M_2 = a\,sp\,\theta < 0$, $ON'_2 = b\,cp\,\theta > 0$ *și vom lua pe* O x *segmentul* $OP_2 = ON'_2 - M'_2 M_2$, *iar intersecția* K *a lui* $O\alpha_2$ *cu perpendiculara în* P_2 *pe* O x, *aparține configurației cerute.*

Variind pe θ *în intervalele din* (119), *punctele* I, J, K *descriu în intervalele corespunzătoare, trei ramuri de curbă, care împreună dau configurația* (119), (fig. 39).

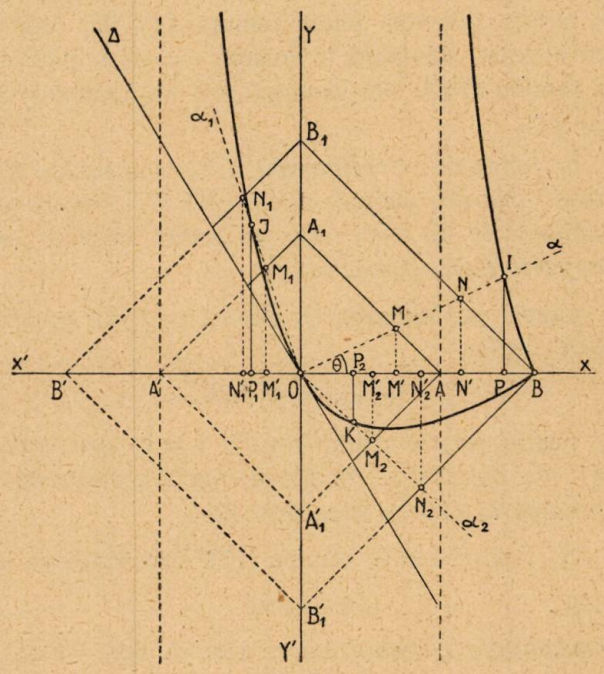


Fig. 39.

În adevăr, este ușor de observat că, *coordonatele ortorombice* (r, θ) ale punctelor I, J, K situate respectiv pe ramurile B I, J O, O K B satisfac ecuația (118).

Ce fel de arce de curbă sunt ramurile B I, J O, O K B? Răspunsul îl vom găsi în soluția 2-a.

Soluția 2-a. Ținând seamă de expresiile lui $sp\,\theta$, $cp\,\theta$ în funcție de $\mathrm{tg}\,\theta$, date în tabloul (11) din *„Trig. patratică"*, ecuația (118) devine pentru cadranele I, II, IV, respectiv

$$r = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\theta + b}{1 + \mathrm{tg}\,\theta}, \qquad r = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\theta + b}{\mathrm{tg}\,\theta - 1}, \qquad r = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\theta + b}{1 - \mathrm{tg}\,\theta}.$$

Transpunând aceste ecuații în *coordonate carteziene* cu ajutorul formulelor de transformare (9'), obținem

(120) $x=\frac{ay+bx}{x+y}$, $-x=\frac{ay+bx}{y-x}$, $x=\frac{ay+bx}{x-y}$,

valabile respectiv numai în cadranele I, II, IV.

Prima ecuație reprezintă o iperbolă, care are ca asimptote dreptele $x=a$, $x+y=b-a$, trece prin origină și prin punctul B, din care vom reține numai ramura B I asimptotă dreptei $x=a$.

Celelalte două ecuații din (120) sunt identice și reprezintă tot o iperbolă cu asimptotele $x=-a$, $x-y=a+b$, ce trece prin origină și prin punctul B și din care vom reține ramura J O din cadranul al 2-lea, asimptotă la dreapta $x=-a$, precum și ramura O K B din cadranul al 4-lea, continuarea lui J O.

În concluzie: *Configurația* (118) *se compune din două ramuri de iperpole diferite* B I *și* J O B, *ce se întâlnesc în* B, *care este un punct singular cu tangente reale, distincte.*

Cazuri particulare. 1°. Pentru $a=b=1$, ecuația (118) devine

$$r=sp\,\theta+cp\,\theta$$

și pentru primul cadran rezultă $r=1$, *deci arcul* B I *din fig. 39 se înlocuește cu o semi-dreaptă paralelă la* O y *ce trece prin* B.

2°. Pentru $a=0$, ecuația (118) reducându-se la

(121) $$r=b\,cp\,\theta,$$

configurația corespunzătoare este formată din segmentele de dreaptă BB_1, BB_1' *și din axa* $y'y$, (fig. 39).

Relevăm configurația interesantă (121), *formată din laturile triunghiului* B_1BB_1' *și din prelungirile* B_1y, $B_1'y'$ *ale laturei* B_1B_1'.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

17. — *Zur Identität* Q, R, S $\overset{n}{=}$ U, V, W *für* $n=2,4$.

Wir lösen diese Identität mit der Kondition, dass $Q<R<S$ und $U<V<W$, sowie, dass $Q+R\neq S$ und $U+V\neq W$.

I. (1) Wir gehen aus von der Relation

$(Au+Av)$, $(Bu+Cv)$, $(Du-Bv)$, $(Cu-Dv)\overset{n}{=}$

$(Au-Av)$, $(Bu-Cv)$, $(Du+Bv)$, $(Cu+Dv)$

für $n=2,4$ mit der Voraussetzung, dass A, A $\overset{n}{=}$ B, C, D für $n=2,4$, wo $B+C=D$ ist. Wählt man nun u und v so, dass auf der linken Seite der Identität ein Glied entsteht, welches einem Gliede der rechten Seite gleich ist (wobei die Vorzeichen verschieden sein dürfen), sodass man diese Glieder streichen kann, dann hat man eine Lösung zur vorgelegten Identität.

Exempel: $A=7$, $B=3$, $C=5$, $D=8$, $u=3$, $v=2$ ergibt 35, 19, 18, $(-1)\overset{n}{=}7$, (-1), 30, 31 für $n=2,4$, also bei Ordnung der Wurzeln nach Grösse 18, 19, $35\overset{n}{=}7$, 30, 31 für $n=2,4$.

II. Eine zweite Lösung zur Identität Q, R, S $\overset{n}{=}$ U, V, W für $n=2,4$ mit den unten I angegebenen Konditionen ist folgende:

(1) Wir lösen zunächst die Relation $x, y\overset{n}{=}a, b, c$ für $n=1,3$, wo $x-y=a-b$, indem wir setzen

$$x=(\alpha+\beta)(2\alpha-\beta);\quad y=\beta(3\alpha+\beta);$$

$$a=(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta);\quad b=-\alpha(\alpha-3\beta);$$

$$c=2(\alpha^2+\beta^2).$$

Exempel: $\alpha=2$, $\beta=1$ gibt $9,7\overset{n}{=}4,2,10$ für $n=1,3$.

(2) Aus $x, y\overset{n}{=}a, b, c$ für $n=1, 3$, wo $x-y=a-b$, folgt die Relation 0, $c-b$, $c-a$, $c+y$, $c+x\overset{4}{=}c-y$, $c-x$, $c+a$, $c+b$, $2c$. Bei dieser Relation muss $(c+y)+(c+a)=(c+x)+(c+b)$ sein. Wir setzen nun

$$s=\frac{(c+y)+(c+a)}{2}=\frac{(c+x)+(c+b)}{2}=$$

$$c+\frac{y+a}{2}=c+\frac{x+b}{2}.$$

(3) Aus der Relation unter (2) folgt nach den Gesetzen für simultane Identitäten die Relation

$$[0-(c+\tfrac{x+b}{2})],\ [c-b-(c+\tfrac{x+b}{2})],\ [c-a-(c+\tfrac{y+a}{2})],\ [c+y-(c+\tfrac{y+a}{2})],\ [c+x-(c+\tfrac{x+b}{2})] \overset{4}{=}$$

$$[c-y-(c+\tfrac{y+a}{a})],\ [c-x-(c+\tfrac{x+b}{2})[,\ [c+a-(c+\tfrac{y+a}{2})],\ [c+b-(c+\tfrac{x+b}{2})],\ [2c-(c+\tfrac{x+b}{2})].$$

Daraus folgt, auf ganze Zahlen gebracht, die Formel

$$[-2c-x-b],\ [-3b-x],\ [-3a-y],\ [y-a],\ [x-b] \overset{4}{=}$$
$$[-3y-a],\ [-3x-b],\ [a-y],\ [b-x],\ [2c-x-b].$$

Bei dieser Formel geben $[y-a]$ und $[a-y]$, also 4. Glied der linken und 3. Glied der rechten Seite, sowie $[x-b]$ und $[b-x]$, also 5. Glied der linken und 4. Glied der rechten Seite, für alle geraden Exponenten je die gleichen Werte und können daher für gerade Exponenten unberücksichtigt bleiben. Somit ergibt sich für die Lösung der vorgelegten Identität die Formel

$$[-2c-x-b],\ [-3b-x],\ [-3a-y] \overset{n}{=}$$
$$[-3x-b],\ [-3x-b],\ [2c-x-b],$$

für $n=2, 4$.

(4) Aus der numerischen Lösung unter (1) folgt, wenn man $9=x,\ 7=y,\ 4=a,\ 2=b,\ 10=c$ setzt, das Resultat

$$(-31),\ (-15),\ (-19) \overset{n}{=} (-25),\ (-29),\ 9$$

für $n=2, 4$. Dies ergibt bei Ordnung der Glieder nach Grösse, da man die negativen Vorzeichen unberücksichtigt lassen kann, das Resultat

$$\begin{cases} 15^2+19^2+31^2=9^2+25^2+29^2 \\ 15^4+19^4+31^4=9^4+25^4+29^4. \end{cases}$$

(5) *Anmerkung.* Die Identität $Q, R, S \overset{n}{=} U, V, W$ für $n=2, 4$ ist ferner zu lösen mit der Kondition $Q+R=S$ und $U+V=W$; sie ist auch lösbar mit der Kondition $Q^2+R^2=W^2$ und $U^2+V^2=S^2$.

ALFRED MOESSNER
(ANSBACH)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, An. XLVII, August 1942. Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plautius Andronescu*. Despre poziția relativă a două puncte din planul unui triunghiu, de *P. P. Drăghicescu*. Raport pentru decernarea premiului de Mecanică, *„Spiru Haret"*, de *G. G. Constantinescu*, C-dor *Linteș*, Ing. *Al. Stoenescu*. Note matematice, probleme rezolvate și propuse.

2. *Pozitiva*, revistă de Matematici, An. II, No. 7—10, Martie-Iunie 1942. O teoremă de geometrie neeuclidiană, de *D. Barbelian*. Asupra ecuației diferențiale lineare *Laplace*, de *G. G Constantinescu*. Construcția centrului de curbură la curbele polar reciproce, de *Adrian Gheorghiu* Asupra unor generalizări ale formulei lui *Pascal*, de *Eugen Vișa*. Note matematice de *Răducan Georgescu* și *Vernescu V. Nicolae*. Probleme rezolvate și propuse.

3. † *Gheorghe Bratu*. Curs de Analiză matematică.
Colegii regretatului și distinsului profesor *Gh. Bratu*, care i-au litografiat acum câteva luni, *„Cursul de Astronomie"*, i-au litografiat în continuare și *„Cursul de Analiză Matematică"*. Aceasta, nu numai pentru eternizarea numelui și memoriei marelui profesor, dar și pentru valoarea intrinsecă a acestor cursuri, de real folos studenților ce le vor cerceta.

4. *Vincenzo Cavallaro* Su la generalizzazione del triangolo delle mediane (Estratto dal Periodico di Matematiche, 1941.)

5 *Vincenzo Cavallaro*. Punti di *Feuerbach*. Appunti per un' attraente lezione di trigometria. (Esercitazioni matematiche, Publicazioni del Circolo Matematico di Catania, Vol. XIII, 1941).

6. *Vincenzo G. Cavallaro*. Sull'approssimata rapprezentazione di due serie sur un circolo di ragio unitario. Su l'ettagono e su l'ennagono regolari Su una procedura construttiva del punto simediano e dei poli essimediani associati. Proprietà del quadrangolo che si conservano al limite collineare. Proprietà dell'iperbole. (Extratto del Bolletino di Matematica, 1942).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1280. — *Trouver un carré parfait de cinq ciffres, dont le cifre des centaines, égal à* 1, *soit seul impair.*

V. THÉBAULT.

Soluție. În condițiile problemei, numărul cerut N^2 trebuie să fie astfel, ca să avem,

$$20100 < N^2 < 88184,$$

deci

$$(1) \qquad 141 < N < 297.$$

Cum cifrele lui N^2 sunt toate pare, afară de cea

din mijloc şi cum terminaţiile de două cifre, pare, ale unui patrat perfect sunt

00, 04, 24, 44, 64, 84

(Culegere de Probleme, Cap. XXXIX) urmează că N^2 poate fi terminat în

100, 104, 124, 144, 164, 184.

Forma patratelor terminate cu aceste cifre, este respectiv

$100n \pm 10$; $500n \pm 152$; $500n \pm 182$; $500n \pm 12$;

$500n \pm 142$; $500n \pm 72$. [1]

Ţinând seamă de (1), nu putem păstra, de cât

$$N = 100n \pm 10,$$

unde $n = 1, 2, 3$. Deci N poate fi

110, 210, 190, 290.

Soluţiile problemei sunt numai

$$210^2 = 44100$$

$$290^2 = 84100.$$

Soluţie analoagă dată de D-I *Negrea A. Mircea* (Brăila) Alte soluţii mai lungi, date de D-nii; *Chiria I Simion* (Lic., Huşi), *Godeanu I. Vasile* (Lic. Milit., Craiova) *Hermann I. Carol* (Blaj), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. de Of. de Artilerie), *Rosemberg I.* (Lic, Roman) şi *Teodorescu N. Dorin* (Colegiu Milit. „N. Filipescu")

Problema 1322. — *Indicatorul unui număr este 1440, care este acel număr?*

MAIOR I. LINTES.

Soluţie. Se ştie că, dacă un număr N descompus în factori primi, este de forma

$$N = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda,$$

atunci indicatorul său $\varphi(N)$ este dat de relaţia

$$(1) \quad \varphi(N) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} \cdots l^{\lambda-1} (a-1)(b-1) \cdots (l-1).$$

În cazul nostru, fiindcă $1440 = 2^5 . 3^2 . 5$, deci

$$\varphi(N) = 2^5 . 3^2 5,$$

grupând convenabil putem scri încă

$$\varphi(N) = 2^2 . (3-1)(5-1) . 3^2 . 5 =$$

$$2^{3-1} . 3^{3-1} 5^{2-1} (2-1)(3\ \ 1)(5-1).$$

De aci rezultă

$$N = 2^3 . 3^3\ 5^2 = 5400.$$

Prin urmare acel număr cerut este 5400.

Soluţie de D-l *Dobrescu D Paul* (Colegiu Militar N Filipescu)

Problema 1407. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\prod_{k=1}^{2p-1}\left(\sin x - \cos\frac{k\pi}{2p}\right) = (-1)^{p+1} \operatorname{tg} x \prod_{k=1}^{2p-1}\left(\cos x - \cos\frac{k\pi}{2p}\right)$$

V. ALACI

Soluţie. Autorul acestei probleme, în articolul *„O metodă pentru calcularea unor produse trigonometrice"*, (R. M, T.", An. XIV, No. 12, stabileşte relaţiile:

$$\prod_{k=1}^{2p-1}\left(\sin x - \cos\frac{k\pi}{2p}\right) = \frac{(-1)^{p+1} \sin 2px}{2^{2p-1} \cos x},$$

$$\prod_{k=1}^{2p-1}\left(\cos x - \cos\frac{k\pi}{2p}\right) = \frac{\sin 2px}{2^{2p-1} \sin x}.$$

Înlocuind valoarea lui $\frac{\sin 2px}{2^{2p-1}}$ scoasă din a 2-a relaţie, în membrul al 2-lea din prima relaţie, obţinem

$$\prod_{k=1}^{2p-1}\left(\sin x - \cos\frac{k\pi}{2p}\right) =$$

$$\frac{(-1)^{p+1}}{\cos x} \cdot \sin x \prod_{k=1}^{2p-1}\left(\cos x - \cos\frac{k\pi}{2p}\right),$$

sau

$$\prod_{k=1}^{2p-1}\left(\sin x - \cos\frac{k\pi}{2p}\right) = (-1)^{p+1} \operatorname{tg} x \prod_{k=1}^{2p-1}\left(\cos x - \cos\frac{k\pi}{2p}\right),$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluţii date de D-nii: *Amăresteanu M.* (Craiova), *Petrescu Anastasie, Pompeiu Marica* (Beiuş) şi *Predoescu Marin* (Polit, Timişoara).

Problema 1419. — *Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinele ecuaţiei*

$$x^3 + ax^2 + b = 0.$$

Să se determine b, astfel ca între rădăcinele ecuaţiei date să existe relaţia

---

[1] A vedea *„Gazeta Matematică"*, Vol. 37, p. 368, sau un supliment al D-lui Thébault „Sur les carrés parfaits", din *Mathesis*, Vol. 48.)

$$\sum [(x_1^2+x_2^2)^2 - x_3^4] = a^3 + \frac{b}{a^2}.$$

În urmă, să se rezolve ecuația dată, determinându-se a, ca ea să aibă toate rădăcinile reale.

V ALACI.

Soluție. Fiindcă,

$$(x_1^2+x_2^2)^2 - x_3^4 = x_1^4 + x_2^4 - x_3^4 + 2x_1^2x_2^2,$$

ce rezultă

$$\sum [(x_1^2+x_2^2)^2 - x_3^4] =$$

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+2x_1^2x_2^2+2x_2^2x_3^2+2x_3^2x_1^2 = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$$

și deci relația din enunț devine

$$(1) \qquad (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2 = a^3 + \frac{b}{a^2}.$$

De altă parte, relațiile cunoscute între rădăcinele unei ecuații și coeficienții săi, permit a scri pentru ecuația din enunț:

$$x_1+x_2+x_3 = -a$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 0.$$

Ridicând prima din aceste relații la patrat și scăzând a 2-a relație multiplicată cu 2, obținem

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2,$$

astfel că relația (1) devine

$$a^4 = a^3 + \frac{b}{a^2},$$

deci

$$\boxed{b = a^6 - a^5}.$$

Înlocuind această valoare a lui b, în ecuația din enunț avem

$$(2) \qquad x^3 + ax^2 + a^6 - a^5 = 0.$$

Rămâne să rezolvim această ecuație și să punem condiția, ca toate rădăcinile ei să fie reale.

Ecuația (2) se mai poate scri

$$x^3 + a^6 - a(x^2 \quad a^4) =$$

$$(x+a^3)[x^2+(a-a^2)x + a^4 - a^3] = 0$$

și ea este echivalentă cu ecuațiele:

$$\begin{cases} x = a^2 \\ x^2 - a(a-1)x + a^3(a-1) = 0. \end{cases}$$

Dacă a este real, prima din aceste ecuații are rădăcina reală și pentru ca și ecuația 2-a, care este de gradul al 2-lea, să aibă rădăcinile reale, trebuie ca realizantul ei să fie pozitiv, adică

$$a^2(a-1)^2 - 4a^3(a-1) \geq 0,$$

sau

$$a^2(a-1)(3a+1) \leq 0.$$

Această inegalitate este satisfăcută, evident, pentru

$$\boxed{-\frac{1}{3} \leq a \leq 1},$$

care constitue al 2-lea răspuns al problemei.

Soluție dată de D-ra *Popescu N. Maria* (studentă, București) și D-l *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova).

Problema 1899. — *Să se găsească progresiile aritmetice ale căror termeni sunt numere întregi și au un număr impar de termeni, știind că primul termen este 6, iar triplul numărului termenilor întrece cu 3 suma termenilor egal depărtați de extremi.*

CORNELIA NANES

Soluție. Fie $2n+1$ numărul termenilor și r rația progresiei. Ultimul termen va fi

$$l = 6 + 2nr.$$

De altă parte, din enunț deducem

$$3(2n+1) - 3 = 6 + (6+2nr),$$

sau

$$6n = 12 + 2nr,$$

deci

$$(1) \qquad n = \frac{6}{3-r}.$$

Termenii progresiei fiind întregi și primul termen fiind 6, urmează că r este întreg, evident și n.

Avem de considerat astfel următoarele cazuri:

1°. Pentru $r = 1$, rezultă din (1), $n = 3$ și progresia este:

$$\div 6.7.8.9.10.11.12.$$

2°. Pentru $r = 2$, rezultă din (1), $n = 6$ și progresia este:

$$\div 6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.30.$$

3°. Pentru $r = -3$, rezultă din (1), $n = 1$ și progresia este:

$$\div 6.3.0.$$

4°. Pentru $r = 0$, rezultă din (1), $n = 2$ și progresia este:

$$\div 6.6.6.6.6, \text{ soluție banală.}$$

5°. Pentru $r=3$, rezultă din (1), $n=\infty$ şi atunci avem seria

$$\div 6 . 9 . 12 . 15 . . . . . ,$$

care nu are senz pentru problema propusă.

Soluţii bune date de D-ra *Mang Ileana* (studentă Timişoara) şi de D-nii: *Aldea V. Minea* (Buzău), *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara) *Boleanţu Lazăr* (Polit., Timişoara), *Goga Fl.* (licenţiat în Matematici), *Ionescu F. Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova) şi *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara).

Problema 1902. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = -1.$$

CPT. C COSTACHESCU.

Soluţia. Ecuaţia dată se poate scri, evident sub forma

$$(1+\cos x)(1+\sin x)=0.$$

De aci rezultă

$$1+\cos x=0, \quad \text{sau:} \quad 1+\sin x=0,$$

ecuaţiuni satisfacute, respectiv, pentru

$$x=(2k+1)\pi, \qquad x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Soluţii bune date de d-rele *Checian N. Ana* (studentă, Timişoara), *Mang Ileana* (studentă, Timişoara) şi de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Becu Crum* (Instit. Român, Sofia), *Boleanţu Lazăr* (Polit., Timişoara), *Crlstea I. Viorel* (Lic., Arad), *Dobrescu V. Eugen* (Lic. Piatra Neamţ), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit, Timişoara), *Goga Fl.* (stud., Timişoara), *Gligor N. Ioan* (Lic., Arad), *Ionescu F. Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Luca L. Laurenţiu* (Lic. Arad), *Lupescu Corneliu* (S Lt., Roman), *Manolache C. Mircea* (Lic. Internat, Iaşi), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Săruleşteanu I. Emanoil* (Bucureşti), *Schapira Salo* (Piatra Neamţ), *Ţarălungă Savel* (Lic. Internat, Iaşi), *Vasiliu D-tru* (Lic. Milit., Timişoara şi *Wegener Eugen* (Bucureşti)

PROBLEME PROPUSE

2066. — Un număr, patratul şi cubul său se termină în aceiaşi cifră. Cubul este de forma $abcdacec$, în care e este jumătatea lui a, iar suma tuturor cifrelor este patratul ultimei cifre. Care este acel număr?

I. CUREA

2067. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{2x+\sqrt{4x-1}} \pm \sqrt{2y+\sqrt{4y-1}} = 5\sqrt{2} \\ \sqrt[4]{x-0{,}25} + \sqrt[4]{y-0{,}25} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

ADRIAN I. POPESCU

2068. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \Sigma x^2 y^2 - \Sigma x^2 = 15 \\ xyz = 4 \\ (x^3-1)(y^3-1)(z^3-1) = 126. \end{cases}$$

EUGEN I. SIPOS

2069. — Să se stabilească relaţia

$$\frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}(C_n^1)^2+\frac{n-2}{3}(C_n^2)^2+\frac{n-3}{4}(C_n^3)^2+\cdots + \frac{1}{n}(C_n^{n-1})^2 = \frac{n}{n+1}C_{2n}^n.$$

ION RIZESCU

2070. — Fie AA' înălţimea triunghiului ABC cu ortocentrul în H. Se notează cu A_1 diametralul lui A în cercul (O) circumscris triunghiului ABC şi cu P mijlocul lui OA_1.

Să se demonstreze că A_1A' este paralelă cu PH.

G-L GH. BUICLIU

2071. — Să se rezolve ecuaţia

$$\sin(x-a)=\cos x-\cos a.$$

EUGEN WEGENER

2072. — Se dă un triunghiu ABC şi mediana $AM=m$.

Fie,

$$\sphericalangle MAC=\alpha, \quad \sphericalangle MAB=\beta, \quad \sphericalangle AMC=\gamma.$$

Să se stabilească relaţiile

$$b^2\cos 2\alpha - c^2\cos 2\beta + 2am\cos\gamma = 0,$$

$$4bc\cos(\alpha-\beta)+a^2\cos 2\gamma = 4m^2,$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

V. ALACI

2073. — Un submarin în imersiune are un drum N, viteză 6 Mile marine pe oră. O navă are drum E, viteză 15 Mile marine pe oră. Distanţa de la punctul de încrucisare al drumurilor până la submarin este 19 Mile, iar până la navă 35 Mile. Submarinul dispune de aparate de ascultare, care aud sgomotele elicelor produse de o navă de la o distanţă de 10 Mile.

Se Cere: 1°. După cât timp submarinul va auzi sgomotele elicelor şi în ce direcţie.

2°. După cât timp sgomotele elicelor vor dispare şi în ce direcţie. CPT. C. COSTACHESCU

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXI, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XXI, cu preţul de lei 200 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXII. OCTOMVRIE 1942 No 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

CUPRINSUL

1. **V. ALACI**: UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE" (URMARE).

2. NOTE MATEMATICE: 18, 19.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 1010, 1402, 1511, 1719.

5. PROBLEME PROPUSE: 2074 — 2081.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — No. 8 TIMISOARA, OCTOMVRIE 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

UN NOU SISTEM DE COORDONATE: „COORDONATE ROMBICE“

DE

V. ALACI.

(urmare)

Coordonate patratice.

49. Dacă ne referim la definiția *coordonatelor rombice* dată la începutul acestei lucrări, sub No. 2 și particularizăm unghiul auxiliar φ, luând $\varphi=45^0$, avem *sistemul de coordonate patratice*, numit astfel, fiindcă ecuația

(122) $$r = a \qquad (a>0)$$

reprezintă în acest sistem, un patrat.[1]

În adevăr, dacă avem patratul A B A′ B′ cu vârfurile pe axe și semi-diagonala $OA = a$, atunci *coordonatele patratice* (a, θ) a unui punct oarecare P de pe contur satisfac, singure, ecuația (122). Formulele de transformare (1) și (9) din cazul general, devin în cazul particular $\varphi = 45^0$,

(123) $$\boxed{\begin{aligned} x &= r\,cp\,\theta \\ y &= r\,sp\,\theta \end{aligned}}\,,$$

(124) $$\boxed{\begin{aligned} r &= \pm\, y \pm x) \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}}\,,$$

în care (x, y) și (r, θ) sunt respectiv *coordonatele carteziene* și *patratice* ale unui aceluiași punct P din planul unui *sistem de axe rectangulare* $x'x$, $y'y$.

În expresia lui r din formulele (124), acolo unde avem dublu semn, vom lua perechile de semne

$$+\,+;\quad +\,-;\quad -\,+;\quad -\,-,$$

după cum punctul P este situat respectiv în cadranele I, II, III, IV.

[1]) A se vedea și *„Trig. patratică“*, p. 212.

Nu vom inzista prea mult asupra *coordonatelor patratice* (caz particular al *coordonatelor rombice*), totuși ținem să tratăm numai două probleme, interesante prin natura configurațiilor ce le vom întâlni.

50. **Problemă.** *Se cere configurația de ecuație patratică*

(125) $$r = a(1 + cp\,\theta), \qquad (a>0).$$

Prima soluție. Oricare ar fi arcul θ, avem $r>0$, deci configurația (125) se extinde în toate cadranele.

Configurația (125) este apoi simetrică — într'un sistem de axe rectangulare — față de axa orizontală $x'x$, fiindcă înlocuind θ prin $-\theta$, r rămâne același.

Vom construi dar configurația (125), întâi, în cadranele I și II, apoi o vom întregi cu simetricele ei față de axa $x'x$.

În acest scop, într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ cu origina în O, efectuăm următoarea construcție prin puncte:

Pentru primul cadran. *Luăm pe* Ox *și* Oy *segmentele*

$$OA = OB = a$$

și trasăm segmentul de dreaptă AB. *Ducem apoi o semidreaptă oarecare* $O\alpha$, *în primul cadran și fie* P *intersecția ei cu* AB, *iar* Q *proecția lui* P *pe* Ox.

Mai departe, luăm pe Ox *segmentul* $Q'R = a$.

Intersecția I *a lui* $O\alpha$ *cu paralela la* AB *ce trece prin* R, *aparține configurației* (125), (fig. 40).

În adevăr, însemnând

$$OR = r, \qquad \sphericalangle\, xOI = \theta,$$

coordonatele patratice ale punctului I, observăm că

(126) $$OR = OQ + QR.$$

Dar, din triunghiul dreptunghic O Q P, în virtutea *teoremei I-a* de la triunghiurile dreptunghice din *„Trig. patratică“*, avem

$$O\,Q = (O\,Q + Q\,P)\,cp\,\theta = a\,cp\,\theta,$$

astfel că relaţia (126) devine

$$r = a\,cp\,\theta + a = a\,(1 + cp\,\theta),$$

care este tocmai ecuaţia (125). Punctul I a fost astfel bine determinat.

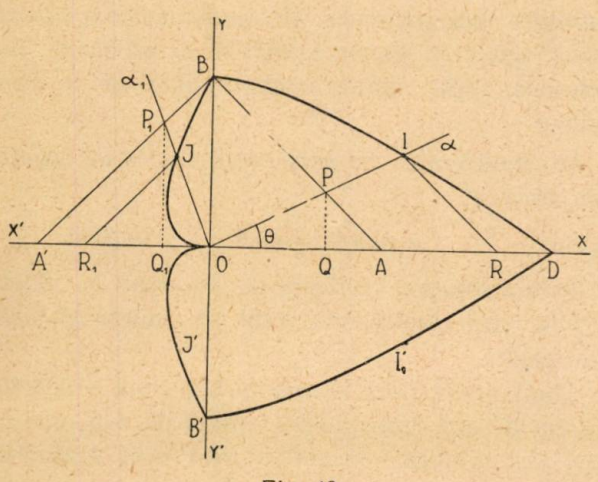


Fig. 40.

Variind θ în intervalul $(0\,,\,\frac{\pi}{2})$, găsim alte puncte analoage lui I, apoi observând şi tabloul de variaţie

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	$2\,a$	$\frac{3\,a}{2}$	a

,

deducem că: *În primul cadran, configuraţia* (125) *este formată din arcul de curbă* D I B.

Pentru cadranul al 2-lea. În cadranul al 2-lea, formula fundamentală

$$sp\,\theta = 1 + cp\,\theta,$$

permite a scri ecuaţia (125) sub forma,

$$r = a\,sp\,\theta,$$

astfel că putem proceda în modul următor:

Luăm pe O *x'* *segmentul* O A' = *a şi din* O *ducem o semidreaptă* O α_1, *care taie în* P_1 *pe* A' B. *Fie* Q_1 *proecţia lui* P_1 *pe* O *x'*, *pe care luăm segmentul* O $R_1 = Q_1\,P_1$. *Intersecţia* J *a lui* O α_1 *cu paralela la* A' B *ce trece prin* R_1, *aparţine configuraţiei* (125).

În adevăr, însemnând

$$O\,R_1 = r, \qquad \sphericalangle\, x\,O\,J = \theta$$

coordonatele patratice ale punctului J, *teorema I a* de la triunghiurile dreptunghice din *„Trig. patratică“*, aplicată triunghiului dreptunghic O Q_1 P_1, ne dă

(127) $$Q_1\,P_1 = (O\,Q_1 + Q_1\,P_1)\,sp\,(\pi - \theta) = a\,sp\,\theta.$$

Cum,

$$Q_1\,P_1 = O\,R_1 = r,$$

relaţia (127) devine

$$r = a\,sp\,\theta = a\,(1 + cp\,\theta),$$

tocmai ecuaţia (125). Punctul *J* a fost astfel bine determinat.

Variind θ în intervalul $(\frac{\pi}{2}\,,\,\pi)$, găsim alte puncte analoage lui *J*, apoi observând şi tabloul de variaţie

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\,\pi}{4}$	π
r	a	$\frac{a}{2}$	0

,

deducem că: *În al 2-lea cadran, configuraţia* (125) *este formată din arcul de curbă* B J O.

Completând ramurile D I B, B J O *cu simetricele lor faţă de axe, avem în întregime configuraţia* (125).

Putem construi şi tangentele în diferite puncte ale configuraţiei (125), folosind formula (20), care în cazul nostru devine

$$\operatorname{cotg} V = -\frac{sp^2\,\theta + cp^2\,\theta}{1 + cp\,\theta} - \operatorname{cotg}\,(\theta + 45^0),$$

pentru cadranele I, III;

$$\operatorname{cotg} V = -\frac{sp^2\,\theta + cp^2\,\theta}{1 + cp\,\theta} - \operatorname{cotg}\,(\theta - 45^0),$$

pentru cadranele II, IV.

De aci deducem

$$|\operatorname{cotg} V|_{\theta=0} = -\frac{3}{2}, \qquad \lim_{\varepsilon=0} |\operatorname{cotg} V|_{\theta=90^0-\varepsilon} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} |\operatorname{cotg} V|_{\theta=90^0+\varepsilon} = -2, \qquad |\operatorname{cotg} V|_{\theta=\pi} = \infty.$$

Rezultă că tangenta în D are coeficientul unghiular $-\frac{2}{3}$, în B avem o tangentă la ramura D I B paralelă cu Ox şi o tangentă la ramura B J O de coeficient unghiular 2, apoi tangenta în O este axa $x'x$.

Ce fel de arce de curbe sunt D I B şi B J O? Răspunsul îl găsim în soluţia 2-a.

Soluţia 2-a. Ecuaţia (125), pentru cadranele I şi II se mai poate scri respectiv

$$r = a\left(1 + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\theta}\right), \text{ pentru cadranul I,}$$

$$r = a\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta - 1}\right), \text{ pentru cadranul II,}$$

[*„Trig. patratică“*, tabloul (11)]. Folosind formulele de transformare (124), avem respectiv:

$$(y + x)^2 = a(2x + y), \text{ pentru cadranul I,}$$

$$(y - x)^2 = a\,y, \text{ pentru cadranul II.}$$

Aceste curbe sunt nişte parabole. *Din prima vom reţine numai arcul* D I B *din primul cadran, iar din a 2-a vom reţine numai arcul* B J O *din al 2-lea cadran; vom lua apoi şi simetricele acestor arce faţă de axa* $x'x$.

Configuraţia (125) *este astfel formată din patrulaterul curbiliniu* D B O B′.

Observare. Analog se poate construi configuraţia mai generală

$$r = a + b\,cp\,\theta,$$

care necesită o anumită discuţie.

51. **Problemă.** *Se cere configuraţia de ecuaţie patratică*

(128) $$r = a\left(\frac{\sin\theta}{sp\,\theta}\right)^2.$$

Prima soluţie. Configuraţia (128) este simetrică — într'un sistem de axe rectangulare — faţă de axe şi origina lor, fiindcă înlocuind θ, prin $-\theta$, sau $\pi + \theta$, r rămâne acelaşi.

Vom construi dar configuraţia (128), întâi, în primul cadran şi apoi o vom întregi cu simetricele ei faţă de axe şi origina lor.

Pentru aceasta, observăm în prealabil că ecuaţia (128), pentru primul cadran, în virtutea formulei cunoscute

$$sp\,\theta = \frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta},$$

[*„Trig. patratică“*, tabloul (11)], devine

(129) $$r = a(\sin\theta + \cos\theta)^2 = a + a\sin 2\theta,$$

expresie care ne conduce la următoarea construcţie prin puncte:

Într'un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *luăm pe* Ox *şi* Oy, *respectiv, segmentele*

$$OA = OB = a,$$

apoi din A *cu* $AO = a$ *ca rază, descrim un semicerc în primul cadran, iar din* O *ducem o semidreaptă variabilă* $O\alpha$ *care întâlneşte în* M *semicercul,* N *fiind proecţia lui* M *pe* Ox. *Luăm încă pe* Ox *un segment* $AP = NM$.

Intersecţia I *a lui* O M *cu paralela la dreapta* A B *ce trece prin* P, *aparţine configuraţiei* (128), (fig. 41).

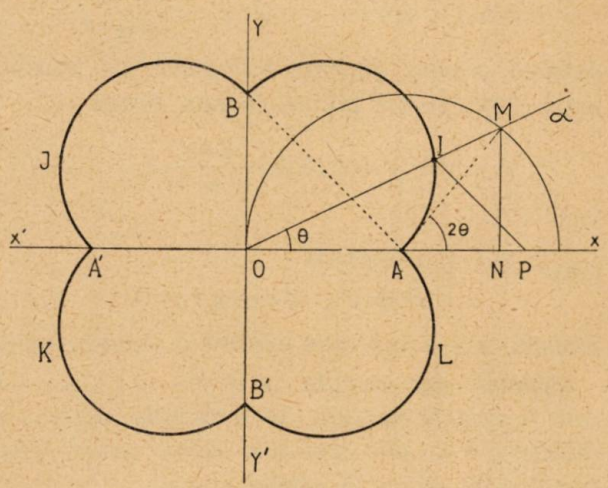


Fig. 41.

În adevăr, însemnând

$$OP = r, \qquad \sphericalangle\, xOI = \theta$$

coordonatele patratice ale punctului I, observăm că,

(130) $$OP = OA + AP = a + NM.$$

Dar, în triunghiul dreptunghic A N M, în care $\sphericalangle\, NAM = 2\theta$, avem

$$NM = AM\sin 2\theta = a\sin 2\theta,$$

astfel că relaţia (130) devine

$$r = a(1 + \sin 2\theta),$$

tocmai relaţia (129), sau (128). Punctul I a fost astfel bine determinat.

Variind θ în intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, găsim alte puncte analoage lui I, apoi observând şi tabloul

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	a	$2a$	a

deducem că: *În primul cadran, configuraţia* (128) *este formată din arcul de curbă* A I B.

Complectând arcul A I B *prin simetrie, faţă de axe şi origina lor, obţinem în întregime configuraţia* (128).

Ce fel de arc este A I B? Răspunsul îl găsim în soluţia 2-a.

Soluţia 2-a. Ecuaţia (128) se mai poate scri

$$r = a(1 + \sin 2\theta) = a\left(1 + \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\right).$$

Această ecuaţie, în baza formulelor de transformare (124), pentru primul cadran, devine

$$y + x = a\left(1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right),$$

sau

$$(131) \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - ax - ay = 0. \end{cases}$$

Ecuaţia $x + y = 0$ este evident o soluţie străină.

Rămâne dar ecuaţia $x^2 + y^2 - ax - ay = 0$, *care reprezintă un cerc, ce trece prin origină, de diametru* A B, *din care vom reţine numai semicercul* A I B *situat în primul cadran.*

Completând acest semicerc cu simetricele lui faţă de axe şi origina lor, obţinem în întregime configuraţia (128), *formată din semicercurile* A I B, B J A′, A′ K B′, B′ L A.

Relevăm această interesantă configuraţie.

Cazul $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$.

52. Vom extinde definiţia de la No. 2 a acestei lucrări, considerând unghiul auxiliar φ cuprins în intervalul $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Pentru φ cuprins în intervalul închis $(0, \frac{\pi}{2})$, am stabilit între *coordonatele carteziene* şi *rombice* ale unui aceluiaşi punct, formulele de transformare (1) şi (9), tratând şi numeroase aplicaţii.

Aceste formule, nu mai sunt valabile însă în cazul $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ şi ele trebuesc înlocuite cu altele, pe care tocmai ne propunem să le găsim.

Dacă în planul unui sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ *cu origina în* O, *luăm un punct* P *şi ducem o dreaptă* P A (A *pe* $x'x$) *astfel ca* $\sphericalangle OAP = \varphi$, *atunci ştim că*

$$\overline{OA} = r, \quad \sphericalangle xOP = \theta \quad \text{şi} \quad \sphericalangle OAP = \varphi$$

împreună, sunt coordonatele rombice ale punctului P, (fig. 42).

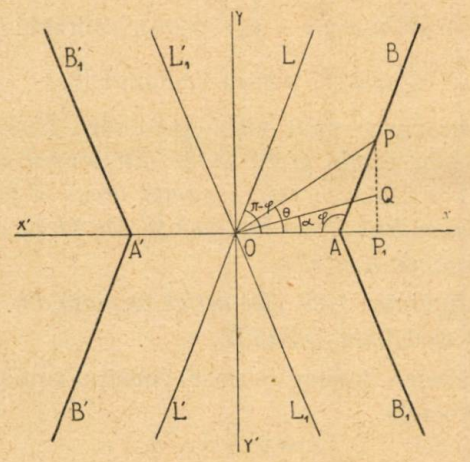


Fig 42

Dacă punctul P este situat în primul sau al 4-lea cadran, *modulul său rombic* este aşezat pe Ox, iar dacă P este situat în cadranele al 2-lea, sau al 3-lea *modulul său rombic* este aşezat pe Ox'.

Urmează de aci restricţiunea: *Numai punctele situate în interiorul unghiurilor* LOL_1, $L'OL'_1$, *sau pe laturile lor, pot fi definite prin coordonatele lor rombice* $(r, \theta; \varphi)$ (dreptele LL', $L_1L'_1$ trec prin O şi fac cu axa $x'x$ unghiurile $\sphericalangle xOL = \sphericalangle x'OL' = \pi - \varphi$).

Din această cauză, câmpul de aplicaţii, în cazul $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ este mai restrâns, dar nu mai puţin interesant.

Formulele de transformare în cazul $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$.

53. Între *coordonatele rectangulare* şi *rombice* ale aceluiaşi punct P, avem următoarele *formule de transformare*

$$\text{(I)}\quad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{r\,cp\,\alpha}{2\,cp\,\alpha - 1} \\ y &= \frac{k\,r\,sp\,\alpha}{2\,cp\,\alpha - 1} \end{aligned}}, \qquad \text{(II)}\quad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{-\,r\,cp\,\alpha}{2\,cp\,\alpha + 1} \\ y &= \frac{-\,k\,r\,sp\,\alpha}{2\,cp\,\alpha + 1} \end{aligned}},$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}}, \qquad \boxed{k = -\operatorname{tg}\varphi},$$

Formulele (I) sunt valabile când P este situat în domeniul unghiului $L\,O\,L_1$, iar formulele (II) sunt valabile când P este situat în domeniul unghiului $L'\,O\,L_1'$.

Observare. Ambele formule (I) şi (II) pot fi cuprinse în următoarea formulă:

$$\text{(III)}\quad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{r\,cp\,\alpha}{2\,cp\,(h\pi + \alpha) - 1} \\ y &= \frac{k\,r\,sp\,\alpha}{2\,cp\,(h\pi + \alpha) - 1} \end{aligned}},$$

unde

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k}}, \qquad \boxed{k = -\operatorname{tg}\varphi},$$

în care luând $h = 0$, avem formulele (I), iar luând $h = 1$, avem formulele (II).

Invers. *Coordonatele rombice* ale unui punct P, se exprimă în funcţie de *coordonatele lui carteziene*, prin formulele

$$\text{(IV)}\quad \boxed{\begin{aligned} r &= \pm\left(x \mp \frac{y}{k}\right) \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}}, \qquad (k = -\operatorname{tg}\varphi),$$

în care, acolo unde avem dublu semn, se vor lua perechile de semne

$$+\,-; \quad -\,+; \quad -\,-; \quad +\,+,$$

după cum punctul P este situat, respectiv, în porţiunile din cadranele I, II, III, IV din domeniile menţionate, $L\,O\,L_1$, $L'\,O\,L_1'$.

Rămâne să justificăm formulele (I), (II) şi (IV).

Pentru aceasta, fie un punct P situat în domeniul $L\,O\,L_1$ şi în primul cadran.

Coordonatele rombice şi *carteziene* ale lui P sunt respectiv

$$O\,A = r, \qquad \sphericalangle\, x\,O\,P = \theta, \qquad \sphericalangle\, O\,A\,P = \varphi;$$

$$O\,P_1 = x, \qquad P_1\,P = y.$$

Pe ordonata lui P luăm un punct Q astfel ca $P_1\,Q = A\,P_1 = x - r$ şi notăm $\sphericalangle\, x\,O\,Q = \alpha$.

În triunghiul dreptunghic $O\,P_1\,Q$, *teorema I-a* de la triunghiurile dreptunghice din „*Trig. patratică*“, ne dă

$$O\,P_1 = (O\,P_1 + P_1\,Q)\,cp\,\alpha$$

sau,

$$\text{(132)}\qquad x = (2x - r)\,cp\,\alpha,$$

de unde

$$\text{(133)}\qquad x = \frac{r\,cp\,\alpha}{2\,cp\,\alpha - 1},$$

care este prima din formulele (I).

Acum, dacă în ecuaţia dreptei A P, care este

$$y = (x - r)\operatorname{tg}(\pi - \varphi) = k\,(x - r),$$

înlocuim x prin valoarea sa din (133), obţinem

$$\text{(134)}\quad y = \frac{k\,r\,sp\,\alpha}{2\,cp\,\alpha - 1}, \quad \text{(fiindcă } 1 - cp\,\alpha = sp\,\alpha),$$

care este a 2-a din formulele (I).

Impărţind relaţia (134) prin (133), găsim

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{k},$$

relaţie care defineşte algebric pe α.

Schimbând în (133) şi (134) α în $-\alpha$, obţinem coordonatele simetricului lui P, faţă de axa $x'x$.

Formulele (I) sunt astfel valabile în domeniul închis $L\,O\,L_1$.

Analog se stabilesc formulele (II), ţinând seamă că P fiind în domeniul $L'\,O\,L_1'$, în relaţia (132), care se menţine şi în acest caz, trebuie înlocuit x prin $-x$.

Dacă rezolvim ecuaţiile (I) şi (II) în raport cu r şi θ, obţinem cu uşurinţă formulele (IV), care exprimă *coordonatete rombice* $(r,\ \theta;\ \varphi)$ ale unui punct P din domeniile $L\,O\,L_1$, $L'\,O\,L_1'$ în funcţie de *coordonatele lui carteziene.*

Aplicaţie.

Vom soluţiona numai următoarea problemă:

54. **Problemă.** *Se cere configuraţia de ecuaţie rombică*

(135) $$r = a, \qquad (a > 0),$$

ştiind că unghiul auxiliar φ *este cuprins în intervalul* $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Prima soluţie. Alegem un sistem de axe rectangulare $x'x$, $y'y$ cu origina în O şi luăm pe axa $x'x$ segmentele $OA = OA' = a$, (fig. 42). Prin A şi A′ ducem, de o parte şi alta a axei $x'x$, semidreptele AB, AB_1, $A'B'$, $A'B'_1$ astfel ca

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OAB_1 = \sphericalangle OA'B' = \sphericalangle OA'B'_1 = \varphi.$$

Este evident că, punctele P situate pe aceste semidrepte şi numai ele, aparţin configuraţiei (135), pentru că oricare din aceste puncte are *coordonatele rombice* $(a, \theta; \varphi)$ şi ele satisfac astfel ecuaţia (135).

De aci rezultă că: *Configuraţia cerută este conturul format din laturile unghiurilor* BAB_1, $B'AB'_1$. Relevăm această remarcabilă configuraţie.

Observare. Pentru cazul particular $\varphi = \pi$, *ecuaţia* (135) *reprezintă semidreptele* Ax', $A'x'$. (Am văzut că pentru $\varphi = 0$, sau $\frac{\pi}{2}$, ecuaţia (135) reprezintă, respectiv, segmentul AA', sau două drepte paralele cu axa $y'y$ ce trec prin A şi A′).

Soluţia 2-a. Transpunând *ecuaţia rombică* (135) în *coordonate carteziene*, în baza formulelor (IV), găsim că ea este echivalentă cu următoarele patru ecuaţii

(136) $$x - \frac{y}{k} = a, \quad x + \frac{y}{k} = -a, \quad \frac{y}{k} - x = a, \quad \frac{y}{k} + x = a$$

valabile pe rând în porţiunile din cadranele I, II, III, IV, cuprinse în domeniile LOL_1, $L'OL'_1$.

Vom construi deci dreptele (136) şi vom reţine pe rând din fiecare, numai semidreptele AB, $A'B'_1$, $A'B'$, AB_1.

Obţinem astfel conturele unghiulare BAB_1, $B'_1A'B'$, *ca în prima soluţie.*

Intersecţii.

Pentru a invedera diversitatea problemelor ce se pot trata în domeniul *coordonatelor rombice*, vom trata acum o problemă de intersecţie.

55. **Problemă.** *Să se găsească intersecţia configuraţiilor*

(137) $$r = a, \qquad r = b, \qquad (b > a > 0),$$

φ *şi* ψ *fiind unghiurile corespunzătoare date,*

$$0 \leq \varphi, \ \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

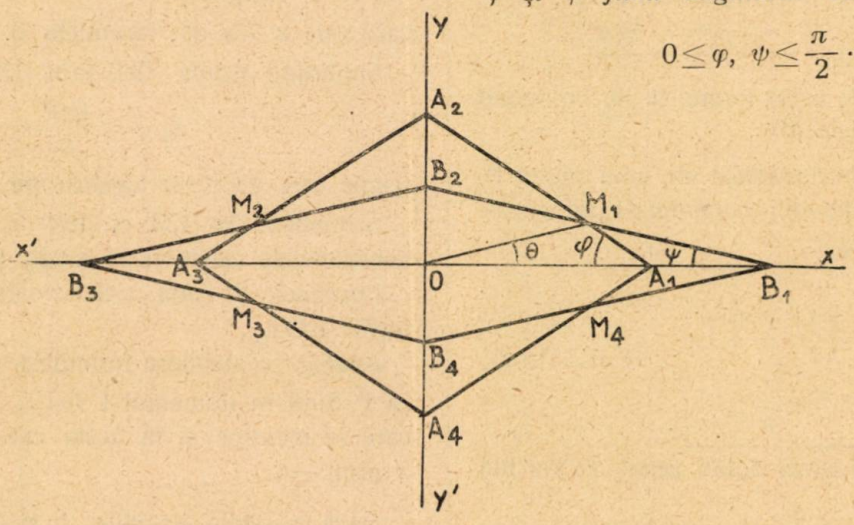


Fig. 43.

Soluţie. Configuraţiile date, în virtutea problemei de la No. 13 din această lucrare, sunt nişte romburi şi anume:

$r = a$, este rombul $A_1A_2A_3A_4$ cu o semidiagonală $OA_1 = a$ şi $\sphericalangle OA_1A_2 = \varphi$;

$r = b$, este rombul $B_1B_2B_3B_4$ cu o semidiagonală $OB_1 = b$ şi $\sphericalangle OB_1B_2 = \psi$, (fig. 43).

Un punct de intersecție M_i are evident *coordonatele rombice*

$$(a,\ \theta;\ \varphi), \quad \text{sau} \quad (b,\ \theta;\ \psi),$$

după cum este considerat ca aparținând primului romb, sau celui de al 2-lea.

Dacă $(x,\ y)$ sunt *coordonatele carteziene* ale aceluiași punct de intersecție M_i, atunci în virtutea *formulelor de transformare* (9) ce le-am stabilit, avem simultan:

$$(138) \qquad \begin{cases} x = a\ cp\ \alpha = b\ cp\ \alpha_1 \\ y = k\ a\ sp\ \alpha = k\ b\ sp\ \alpha_1 , \end{cases}$$

unde

$$(139) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{k}, & (k = \operatorname{tg}\varphi) \\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{k_1}, & (k_1 = \operatorname{tg}\psi). \end{cases}$$

Să presupunem întâi $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Din relațiile (139) rezultă în acest caz că, α și α_1, sunt cuprinse în intervalul $(0, \dfrac{\pi}{2})$, prin urmare

$$sp\ \alpha + cp\ \alpha = 1, \qquad sp\ \alpha_1 + cp\ \alpha_1 = 1,$$

ceeace ne permite a deduce din aceleași relații (139), pe baza unor proprietați a rapoartelor,

$$cp\ \alpha = \frac{k}{k + \operatorname{tg}\theta}, \qquad cp\ \alpha_1 = \frac{k_1}{k_1 + \operatorname{tg}\theta}.$$

Înlocuind aceste valori în prima relație din (138), obținem

$$\frac{a\,k}{k + \operatorname{tg}\theta} = \frac{b\,k_1}{k_1 + \operatorname{tg}\theta},$$

de unde

$$(140) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{k\,k_1\,(b - a)}{a\,k - b\,k_1}.$$

Această relație ne dă unghiul polar θ a punctului de intersecție M_1, situat în primul cadran, când el există.

Odată punctul M_1 *găsit, din cauza simetriei configurației față de axe și origină, avem și punctele de intersecție* M_2, M_3, M_4.

Discuție. Cum $k\,k_1\,(b - a) > 0$, avem de considerat următoarele cazuri:

1°. Dacă,

$$a\,k - b\,k_1 > 0,$$

atunci putem determina din relația (140) unghiul θ cuprins în intervalul $(0, \dfrac{\pi}{2})$, care fixează poziția punctului de intersecție M_1.

2°. Dacă,

$$a\,k - b\,k_1 = 0,$$

rezultă din (140), $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ și deci vârfurile A_2, B_2 coincid, asemeni și A_4, B_4.

3° Dacă,

$$a\,k - b\,k_1 < 0,$$

configurațiile (137) nu se intersectează.

56. Aplicațiile, poate prea numeroase, pe care le-am tratat în cuprinsul acestei lucrări, au inveder at, credem, importanța *coordonatelor rombice*.

Ele ne-au permis a reprezenta *configurații formate din segmente de drepte, sau din arce de curbe, deci configurații cu puncte unghiulare*, care nu pot fi reprezentate cu mijloacele obicinuite ale *Geometriei Analitice* [1].

Tot *coordonatele rombice* ne-au descoperit *noui proprietăți geometrice ale curbelor* și *noui metode interesante de construcție prin puncte, chiar pentru curbele obicinuite.*

Unele din aceste noui proprietăți au atras deja atenția D-lor Prof. *O. N. Țino* [2] și *N. Abramescu* [3], care le-au reluat și le-au stabilit apoi pe cale pur geometrică.

Am folosit în cursul acestei lucrări multe *curbe clasice*, studiate prin alte metode în diferite tratate și mai ales în Vol. I, de Dr. *Gomes Teixeira*, intitulat: *„Traité des courbes spéciales remarquables"*.

Un caz interesant al *coordonatelor rombice*, ar fi încă acela *în care unghiul auxiliar* φ, presupus constant în cursul acestei lucrări pentru o aceiași curbă, *ar fi funcție de* θ, $\varphi \equiv \varphi(\theta)$.

Orice nouă contribuție adusă în acest domeniu al *coordonatelor rombice*, o vom privi cu multă satisfacție.

---

[1]) *Gino Loria* Perfectionnements, évolution du concept de coordonnées (Mathematica, Vol. XVIII, 1942, p. 145).

[2]) *O N. Țino*: Proprietăți de Geometrie având origina în aplicațiile *„Coordonatelor rombice"*, „R M. T.", An. XXI, p. 144 și An. XXII, No. 1, p. 8:

[3]) *N. Abramescu:* Asupra unei proprietăți geometrice obținută ca aplicație a coordonatelor rombice ale d-lui *V. Alaci*, „R. M T.", An. XXII, No. 1, p. 10.

NOTE MATEMATICE

18. — *O proprietate a trapezului isoscel.*

Fie A B C D un trapez isoscel dat, având A D || B C.

Construim prin vârfurile trapezului segmente egale

$$\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1},$$

astfel ca perechile (AA_1, BB_1) şi (CC_1, DD_1) sunt în acelaşi timp *paralele şi de sens contrar,* sau în acelaşi timp *antiparalele în* $(\widehat{AB, DC})$; iar perechile (AA_1, CC_1) şi (BB_1, DD_1) sunt respectiv *antiparalele* în acelaşi timp în unghiul $(\widehat{AB, DC})$ *sau paralele şi de sens contrar* în acelaşi timp.

Trapezele $A_1B_1C_1D_1$ şi A B C D *au aceeaşi axă de simetrie şi aceaşi mediană.*

1. Să presupunem în primul rând perechile (AA_1, BB_1) şi (CC_1, DD_1) paralele şi de sens contrar, iar (AA_1, CC_1) şi (BB_1, DD_1) antiparalele în unghiul $(\widehat{BA, CD})$. Fie O intersecţia dreptelor B A, C D.

Figurile AA_1BB_1 şi DD_1CC_1 sunt paralelograme; diagonalele respective se taie la mijlocul lor; deci mediana trapezului A B C D este asemenea mediană trapezului $A_1B_1C_1D_1$. Fie S intersecţia dreptelor A_1A, D_1D; triunghiul A S D este isoscel, căci $\widehat{SAO} = \widehat{SDO}$, iar triunghiul A O D este isoscel, deci S este pe axa de simetrie a trapezului A B C D, care este deci bisectoare unghiului A S D, şi ca urmare A_1, D_1, sunt simetrice faţă cu această axă. În acelaşi fel deducem că vârfurile B_1, C_1 sunt simetrice faţă de axa de simetrie a trapezului A B C D, de unde rezultă proprietatea enunţată.

Observare. În cazul particular, direcţiile perechilor de segmente paralele pot fi luate chiar direcţiile laturilor neparalele ale trapezului dat A B C D; în acest caz avem proprietatea aproape evidentă:

Dacă pe laturile neparalele ale trapezului isoscel A B C D *luăm segmentele* $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1}$ (AA_1, BB_1 şi CC_1, DD_1 *de sens contrar, iar* AA_1, CC_1 *de acelaşi sens*) *trapezul isoscel* $A_1B_1C_1D_1$ *are aceeaşi axă de simetrie şi aceeaşi mediană cu trapezul isoscel* A B C D.

2. Să presupunem acum că perechile (AA_1, CC_1) şi (BB_1, DD_1) sunt paralele şi de sens contrar, iar (AA_1, BB_1) antiparalele în unghiul $\widehat{AOD}$. Perechile de drepte (BB_1, CC_1) şi (AA_1, DD_1) se întâlnesc în I şi L bisectoarea O I a unghiului A O D; punctele (B_1, C_1) şi (A_1, D_1) sunt simetrice faţă de bisectoarea O I, deci axa de simetrie a trapezului isoscel A B C D este deasemenea axă de simetrie şi a trapezului $A_1B_1C_1D_1$. Fie E, E_1 şi F, F_1 intersecţiile dreptelor A D, A_1D_1 respectiv cu BB_1 şi CC_1. Deoarece perechile de drepte (DD_1, BB_1) şi (AA_1, CC_1) sunt paralele, figurile AA_1F_1F şi DD_1E_1E sunt paralelograme, deci $\overline{BB_1} = \overline{DD_1} = \overline{EE_1}$ şi $\overline{CC_1} = \overline{AA_1} = \overline{FF_1}$. Urmează de aci că segmentele $\overline{BE}$ şi $\overline{B_1E_1}$ au acelaşi mijloc M', asemenea că segmentele $\overline{CF}$ şi $\overline{C_1F_1}$ au acelaşi mijloc N'. Acum M'N' trecând prin mijlocul laturei $\overline{B_1E_1}$ şi fiind paralelă cu A_1E_1, trece şi prin mijlocul M_1 al laturei $\overline{B_1A_1}$; asemenea trecând prin mijlocul laturei $\overline{BE}$ şi fiind paralelă cu A E, trece şi prin mijlocul M al laturei $\overline{AB}$. În acelaşi fel arătăm că M'N' trece prin N_1 mijlocul lui $\overline{C_1D_1}$ şi prin N mijlocul lui $\overline{CD}$. Deci trapezele isoscele A B C D şi $A_1B_1C_1D_1$ au aceeaşi dreaptă mediană.

Observare. În caz particular, cele două direcţii ale segmentelor egale pot fi luate direcţiile diagonalelor ale trapezului isoscel dat şi atunci proprietatea poate fi enunţată după cum urmează: *Dacă într'un trapez isoscel, plecând dela cele patru vârfuri, luăm pe diagonale patru segmente egale, toate îndreptate către interior sau toate îndreptate către exterior, trapezul isoscel obţinut unind cele patru extremităţi ale segmentelor egale, are aceeaşi axă de simetrie şi aceeaşi dreaptă mediană cu trapezul isoscel dat.*

Demonstraţiile directe în ambele cazuri particulare sunt imediate.

O. N. ŢINO

19. — *Problema 1280 cere patratul de 5 cifre din care cea de la mijloc egală cu 1 şi celelalte neperechi.*

În soluţia dată la pagina 87 din acest an al revistei, s-au găsit patratele

$$210^2 = 44100 \quad \text{şi} \quad 290^2 = 84100,$$

care răspund enunţului, omiţându-se soluţia

$$142^2 = 20164, \tag{1}$$

care bănuim că a fost vizată de propunător. Deci reluând soluţia de la pag. 87 se găseşte că

$$141 < N < 297, \tag{2}$$

unde N are una din formele

$$500n \pm 152; \quad 500n \pm 182; \quad 500n \pm 12; \quad 500n \pm 142; \quad 500n \pm 72,$$

după ce am exclus cazul $c = d = 0$, care se reduce la găsirea patratelor de 3 cifre, dintre care primele 2 de la stânga perechi, iar ultima egală cu 1. Făcând în şirul precedent $n = 0$, găsim că N, în limitele (2), poate fi unul din numerele

142, 152 sau 182

dintre care numai 142 dă soluţia (1).

Se observă că, rădăcina patrată a acestei soluţii, este tot un număr format din cifra 1 şi din restul cifrelor perechi.

La fel se găseşte că soluţiile problemei, pentru cazul când cifra de la mijloc e nepereche, iar celelalte sunt perechi, sunt următoarele:

$$142^2 = 20164, \quad 158^2 = 24964, \quad 212^2 = 44944,$$

$$258^2 = 66564 \quad \text{şi} \quad 288^2 = 82944,$$

excluzând pe acelea terminate cu zeruri.

G-l Gh. Buicliu

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, No. 1, Septemvrie 1942. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică", Membri decedaţi. Premiile, bursele şi publicaţiile Societăţii „Gazeta Matematică". Raport pentru acordarea premiului „General *Sc. Panaitescu*", de Ing. *Al. Bunescu*, Cpt. *M. Focşăneanu*. Comandor Dr. Ing. *I. Linteş*.

2 *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Tome 194. Sur les combinaisons avec répétitions limitées, par *Paul Montel*. D-l *Montel* dă o nouă demonstraţie pentru o formulă stabilită de D-l Prof. *P. Sergescu*.

3. *Mathematica*, Vol. XVIII, 1942. Viaţa şi opera matematică a lui *Emile Picard*, de *Th. Angheluţă* Opera matematică a lui *Henri Lebesgue*, de *S Stoilov*. Sur une généralisation de la condition de *Lipschitz* d'ordre un, par *J. Favard*. Equations fonctionnelles du premier ordre, par *Michel Ghermanescu*. Sur une classe de surfaces, par *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur la structure des transformations ponctuelles du plan, par *Georges Calugăreanu*. Sur un système de nombres hypercomplexes dérivés des nombres de *Clifford*, par *Gérard Petiau*. Bemerkungen über Gitter und Volumen, von *H. Hadwiger*. Sur une configuration de six points attachée à une Tétraèdre coupé par trois plans parallèles à une face, par *D. V. Ionescu*. Les définitions de l'holomorphie et le prolongement analytique, par *D. Pompeiu*. Perfectionnements, évolution, metamorphoses du concept de „coordonnées". Contribution à l'histoire de la Géométrie Analytique, par *Gino Loria*. Sur les sections d'une surface par des plans menés par une tangente, ou par une droite passant par un point de la surface, par *Nicolas Abramescu*. Sur un problème au contour de la théorie des marées, par *Caius Jacob*.

4 *Michel Ghermanescu* Fonctions entières et les fonctions algèbroïdes (Actualités scientifique et industrielles, 1940).

5. *I G. Murgulescu* Über die Einordnung des Begriffes der Aktivität in die Thermodynamik der Lösungen.

6. *I G. Murgulescu*. Memoriu de titluri şi lucrări.

PROBLEME REZOLVATE

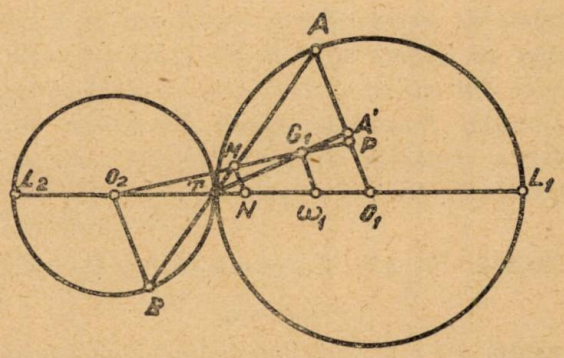
Problema 1010 [1]. *Se dau două cercuri* O_1, O_2 *tangente exterior în* T. *Prin* T *se duce o secantă arbitrară, care întâlneşte cercurile* O_1, O_2 *a doua oară în punctele* A, B. *Dacă secanta* AB *variază în jurul lui* T, *se cere:*

1°. Locul mijlocului segmentului AB.

2°. Locurile centrelor de greutate ale triunghiurilor O_1AT, O_2BT.

C. Cosnita

1°. Fie M mijlocul lui AB şi $R_1 > R_2$ razele celor două cercuri. Notăm cu P intersecţia lui O_1A cu O_2M şi cu N intersecţia lui O_1O_2 cu paralela din M la O_1A. Triunghiurile isoscele TO_1A,



TO_2B, având unghiul din T egal, rezultă că $O_1A \parallel O_2B$ şi deci figura AO_2BP este un paralelogram ca având laturile opuse PA, BO_2 para-

[1]) În tabla de materii a Vol. XI s-a trecut din greşală că această problemă e rezolvită la pag 107 a acelui volum.

lele, iar diagonalele intersectându-se în mijlocul diagonalei A B.

Se vede pe figură, ca o consecinţă a celor precedente că

$$\overline{P O_1} = R_2 - R_1$$

şi

$$\overline{M N} = \frac{1}{2}(R_2 - R_1),$$

iar N este mijlocul lui $O_1 O_2$. Rezultă că M, descrie un cerc cu centrul în N şi de rază $\frac{1}{2}(R_1 - R_2)$. Acest cerc trece şi prin T.

2°. Fie A′ mijlocul lui $O_1 A$ şi G_1 centrul de greutate al triunghiului $O_1 A T$. Punctul A′ descrie un cerc cu centrul în O_1 şi cu raza $\frac{R_1}{2}$, deci G_1 descrie un cerc, omotetic cu precedentul, raportul de omotetie fiind $\frac{2}{3}$, iar centrul de omotetie T.

Un cerc analog descrie centrul de greutate al triunghiului $O_2 B T$.

Notă 1. Dacă cercurile sunt tangente interior, locul lui M este un cerc cu centrul în mijlocul lui $O_1 O_2$ şi cu raza $\frac{R_1 + R_2}{2}$.

2. Bună soluţie geometrică de la D-l *Boeriu Val.* în celelalte soluţii geometrice primite se arăta greşit că locul lui M este un cerc cu centrul în mijlocul lui $L_1 L_2$ în care L_i este diametralul lui T în cele două cercuri.

3. Au trimis, la data propunerii problemei, bune soluţii analitice, d-nii *Boeriu Val.*, *Ivănescu C.*, *Mihăileanu N. N.* şi *Pop Leontin.*

G-l Gh. B.

Problema 1402. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre însemnătoare şi diferite, astfel ca ultima cifră să fie egală cu suma cifrelor din mijloc, ştiind încă, că dacă adăogăm numărului format de cifrele din mijloc, prima cifră a numărului căutat, obţinem rădăcina sa patrată.*

A. AMARASTEANU

Soluţie. Fie $a\,b\,c\,d$ patratul căutat. De oarece

(1) $$d = b + c,$$

urmează $d \geq c$ şi cum toate cifrele sunt însemnătoare şi diferite, $c\,d$ nu poate fi de cât,

(2) 16, 24, 25, 29, 36, 49, 56, 69, 89

având în vedere terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect („*Culegere de Probleme*“, Cap. XXXIX).

Din (1), avem $c = d - b$ şi deci din şirul (2) ştergem pe 24 şi 36, de oare ce cifrele numărului cerut sunt diferite.

Cu numerile rămase din şirul (2), anume

16, 25, 29, 49, 56, 69, 89

şi ţinând seamă de condiţia (1), deducem că patratul cerut trebue căutat printre numerele

(3) $a516$, $a325$, $a729$, $a540$, $a156$, $a369$, $a189$.

Rămâne acum să determinăm pe a, din şirul (3), pentru ca şi ultima condiţie din enunţ, anume

$$a\,b\,c\,d = (b\,c + a)^2,$$

să fie satisfăcută. Ar trebui deci să avem:

1°. $a515 = (51 + a)^2 = [50 + (a + 1)]^2$, deci $a = 3$, sau 5.

Nu putem avea $a = 3$ fiindcă 3516 este divizibil prin 3 fără a fi şi prin 9, deci nu-i patrat perfect.

Nu putem avea $a = 5$, fiindcă 5516, n'are cifrele diferite.

2°. $a325 = (32 + a)^2 = [30 + (a + 2)]^2$, deci $a = 3$.

Nu putem avea $a = 3$, fiindcă 3325 n'are cifrele diferite.

3°. $a729 = (72 + a)^2 = [70 + (a + 2)]^2$, deci $a =$ ', sau 5.

Nu putem avea $a = 1$, fiindcă $73^2 = 5329$ şi nu 1729.

Nu putem avea $a = 5$, fiindcă $77^2 = 5929$ şi nu 5729.

4°. $a549 = (54 + a)^2 = [50 + (4 + a)]^2$, deci $a = 3$, sau 9.

Nu putem avea $a = 3$, fiindcă 3549, este divizibil prin 3, fără a fi şi prin 9, deci nu-i patrat perfect.

Nu putem avea $a = 9$, fiindcă 9549 n'are cifrele diferite.

5°. $a156 = (15 + a)^2 = [10 + (5 + a)]^2$, deci $a = 1$, sau 9.

Nu putem avea $a = 1$, fiindcă 1156, n'are cifrele diferite.

Nu putem avea $a = 9$, fiindcă 9156 este divizibil prin 3 fără a fi şi prin 9, deci nu-i patrat perfect.

6°. $a369 = (36 + a)^2 = [30 + (6 + a)]^2$, deci $a = 1$, sau 7.

Pentru $a = 1$, avem $\mathbf{1369 = 37^2}$, care este o soluţie a problemei.

Nu putem avea $a = 7$, fiindcă $43^2 = 1849$ şi nu 7369.

7°. $a\,189 = (18 + a)^2 = [10 + (8 + a)]^2$, deci $a = 5$, sau 9.

Nu putem avea $a = 5$, fiindcă $23^2 = 529$, care n'are patru cifre.

Nu putem avea $a = 9$, fiindcă 9189 n'are cifrele diferite.

Singura soluție a problemei este astfel **1369=37²**.

Soluție dată de D-ra *Manolache Elena* (Lic, Cluj) și de D-nii *Begu I. Ștefan* (Lic. Lazăr, București), *Berinde Titus* (Polit, Timișoara). *Bucur N. Virgil* (Lic. Milit., Iași), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Chiriac I. Simion* (Lic Huși), *Costescu C-tin* (Lic. Milit., Iași), *Florescu L Victor* (Lic Milit., N. Filipescu), *Godeanu I Vasile* (Șc. Milit., de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (Polit., Timișoara), *Jidanu I. C-tin* (Polit., Timișoara). *Lupescu Gh Corneliu* (Șc. Of de Artilerie), *Marica I. Horia* (Lic., Cluj), *Mașcaș Gh. Petru* (Polit, Timișoara), *Mateiu D. D-tru* (Lic Internat, Iași), *Mihalcea V.* (Lic Beiuș), *Milu I. Nicolae* (Lic. Milit. Chișinău), *Moisă I. Gheorghe* (student), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Negulescu Șt* (Lic. Milit N. Filipescu), *Panait Mircea* (S-lt), *Petrescu Anastasie, Rosemberg I. Ștefănescu, D. Nicolae* (Lic Milit, N Filipescu), *Stoenescu D. Mirel* (Lic. Milit., N. Filipescu), și *Zacaican I* (Conductor de L P., Leova).

Problema 1511. — *Să se formeze ecuația algebrică ale cărei rădăcini sunt:*

$$x = \frac{\cos\frac{k\pi}{p} + 2\sin\frac{k\pi}{p}}{2\cos\frac{k\pi}{p} - \sin\frac{k\pi}{p}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

unde p este un intreg pozitiv.

V. ALACI

Prima soluție. Împărțind terminii fracției prin $\cos\frac{k\pi}{p}$, avem

$$x = \frac{1 + 2\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}}{2 - \operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}},$$

de unde deducem

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p} = \frac{2x-1}{x+2}.$$

Notăm

$$X = \frac{2x-1}{x+2},$$

deci

$$(1) \qquad X = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

În „*Gazeta Matematică*", Vol. XVII, p. 402 am stabilit că ecuația algebrică,

$$(1 + iX)^p - (1 - iX)^p = 0, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

are rădăcinele de forma (1).

Urmează că ecuația cerută este

$$\left(1 + i\frac{2x-1}{x+2}\right)^p - \left(1 - i\frac{2x-1}{x+2}\right)^p = 0,$$

sau

$$[(x+2) + i(2x-1)]^p - [x+2-i(2x-1)]^p = 0.$$

Soluție analoagă dată de d-nii: *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani) și *Negrea A. Mircea* (Brăila)

Soluția 2-a. În virtutea formulelor lui *Euler*, avem

$$\cos\frac{k\pi}{p} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \qquad \sin\frac{k\pi}{p} = \frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right),$$

unde $$t = e^{\frac{ik\pi}{p}}, \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

În baza acestor relații, expresia din enunț devine

$$x = \frac{\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{i}\left(t - \frac{1}{t}\right)}{\left(t + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right)} =$$

$$\frac{i(t^2+1) + 2(t^2-1)}{2i(t^2+1) - (t^2-1)}.$$

De aci deducem

$$[x + 2 + i(2x-1)]\,t^2 = x + 2 - i(2x-1).$$

Ridicând la puterea p și observând că

$$t^{2p} = e^{2ik\pi} = 1,$$

obținem

$$[x+2+i(2x-1)]^p - [x+2-i(2x-1)]^p = 0,$$

aceiași ecuație ca în prima soluție.

Soluție analoagă dată de d-nii: *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani) și *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Of. de Artilerie).

Problema 1719. — *În triunghiul semidreptunghic* A B C ($A = 45^0$) *se cunosc sumele*

$$a + b = m, \qquad a + c = n.$$

Se cere să se rezolve triunghiul.

V. ALACI

Soluție. Dacă în relația cunoscută într'un triunghiu

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

înlocuim $b = m - a$, $c = n - a$, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ scoase din enunț, avem

$$a^2=(m-a)^2+(n-a)^2-\sqrt{2}\,(m-a)(n-a).$$

Efectuând calculele şi ordonând în raport cu a, obţinem

$$(\sqrt{2}-1)a^2+\sqrt{2}(m+n)(\sqrt{2}-1)a-(m^2+n^2-\sqrt{2}\,mn=0,$$

sau

$$a^2+\sqrt{2}\,(m+n)\,a-(\sqrt{2}+1)(m^2+n^2-\sqrt{2}\,mn)=0.$$

Rezolvind această ecuaţie, găsim

$$a=\frac{-(m+n)\pm\sqrt{2\sqrt{2}\,(3+2\sqrt{2})\,mn-(1+2\sqrt{2})(m+n)^2}}{\sqrt{2}}=\alpha$$

Evident că α trebuie să fie pozitiv, de aceea trebuie ca realizantul să fie pozitiv, adică

$$2\sqrt{2}\,(3+2\sqrt{2})\,mn-(1+2\sqrt{2})\,(m+n)^2>0,$$

iar în urmă trebuie luat pentru a valoarea pozitivă, ceeace impune o nouă condiţie.

Odată ce am găsit $a=\alpha$ (α real şi pozitiv), celelalte două laturi b şi c sunt date de relaţiile

$$b=m-\alpha,\qquad c=n-\alpha,$$

iar unghiurile B şi C se află ca soluţii a sistemului de ecuaţii:

$$\begin{cases} B+C=135^0 \\ \operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{m-n}{m+n-2\alpha}\operatorname{cotg}22^0,30'. \end{cases}$$

Soluţii date de D-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Diaconescu D. Ion* (Lic., T.-Severin), *Jidanu I. C.* (Polit., Timişoara), *Matei I. Augustin* (student, Cluj), *Stamate I. Ionel* (licenţiat în matematici). *Tilică C. Ştefan* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Segal Zigu* (Lic., Vaslui) şi *Venter D-tru* (lic. Beiuş).

PROBLEME PROPUSE

2074. — Fie Q_n câtul împărţirei numărului

$$N_n=5^{2^{n-2}}-1$$

prin 2^n şi P_n Suma $1+2^nQ_n$. Să se demonstreze că P_{n+1} este egal cu patratul lui P_n.

G-L GH. BUICLIU

2075. — Avem:

$$\begin{cases} 63+63+21=35+35+77 \\ 63^2+63^2+21^2=35^2+35^2+77^2 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} 63+63+25=35+35+81 \\ 63\,.\,63\,.\,25=35\,.\,35\,.\,81. \end{cases}$$

Se cere soluţia generală în numere întregi a sistemului

$$\begin{cases} 2A+B=2C+D \\ 2A^2+B^2=2C^2+D^2 \end{cases}\text{ şi }\begin{cases} 2A+K=2C+L \\ A^2\,.\,K=C^2\,.\,L. \end{cases}$$

A MOESSNER

2076. — Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul al 2-lea astfel ca

$$P(a)=a(b+c),\quad P(b)=b(a+c),\quad P(c)=c(a+b).$$

În acest caz, pentru care valoare a lui α ecuaţia

$$P(x)+\alpha=0$$

admite o rădăcină dublă.

EUGEN I. SIPOS

2077. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+xy=a \\ (x^2+y^2+x^2y^2)(x+y)(xy-1)=b. \end{cases}$$

LT. ADRIAN POPESCU

2078. — Fiind dată o ecuaţie de gradul al 3-lea cu coeficienţi reali, să se arate că de pe natura realizantului ecuaţiei derivate se poate deduce dacă ecuaţia dată are sau nu rădăcini multiple.

GH. TH. GHEORGHIU

2079. — Să se găsească funcţiunea cea mai generală care satisface ecuaţiei

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t)=\varphi(y,\ x,\ t,\ z).$$

M. GHERMANESCU

2080. — Prin vârfurile A, B, C a unui triunghiu se duc dreptele AA' şi AA'', BB' şi BB'', CC' şi CC'' care întâlnesc laturile opuse în punctele A' şi A'', B' şi B'', C' şi C'' sub un acelaşi unghiu θ şi $\pi-\theta$, senzul de rotaţie fiind acelaşi. Să se arate că triunghiurile $A'B'C'$ şi $A''B''C''$ au arii echivalente.

Pentru ce valoare a lui θ punctele A', B', C' sunt ele în linie dreaptă?

V. THÉBAULT

2081. — Într'un triunghiu ABC, în care notaţiile sunt cele obicinuite, să se arate că avem relaţiile:

$$c^3=b^3\cos 3A+a^3\cos 3B+3abc\cos(A-B),$$

$$b^3\sin 3A-a^3\sin 3B+3abc\sin(A-B)=0,$$

$$b^6+c^6-a^6-9a^2b^2c^2=$$

$$2b^3c^3\cos 3A+6a^4b^2c^2\cos(C-B).$$

V. ALACI

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés.

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

În prezent „*Boletin Matematico*", nu îl primim.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXI, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XXI, cu preţul de lei 200 volumul şi se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte şi să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

ANUL XXII. NOEMVRIE 1942 No. 9.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **EUGEN V. DOBRESCU**: O PROBLEMA DE MECANICA.
2. **V. ALACI**: ASUPRA ARTICOLULUI : O PROBLEMA DE MECANICA.
3. NOTE MATEMATICE: 20, 21.
4. CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL DE ADMITERE IN SCOALA POLITECHNICA TIMISOARA, 1942.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 1489, 1664, 1931.
7. PROBLEME PROPUSE: 2082–2089.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noăstre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Cu plăcere anunţăm, că de la 15 Noemvrie 1942 mai face parte dintre membrii *„Revistei Matematice din Timişoara"* şi distinsul profesor *Weber Matei* de la liceul *„Banaţia"* din Timişoara.

I-i mulţumim călduros pentru cele 30 (treizeci) de abonamente făcute pentru elevii claselor a 7-a şi 8-a de la liceul „BANAŢIA".

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politechnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — No. 9 TIMISOARA, NOEMVRIE 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

O PROBLEMĂ DE MECANICĂ

DE

EUGEN V. DOBRESCU
(ELEV, CL. VII, PIATRA-NEAMȚ).

În articolul de față îmi propun să studiez: *mișcarea unui punct material* M, *obligat să parcurgă conturul unui romb, când raza vectoare ce pleacă din centrul rombului, are o mișcare uniformă.*

Acest studiu este de fapt generalizarea unei probleme a D-lui Prof. *V. Alaci* din „*Trigonometria patratică*" [1].

Fie A B C D un romb de centru O, de semidiagonală $OA = a$ și fie φ unghiul făcut de latura A B cu diagonala O A (fig. 1).

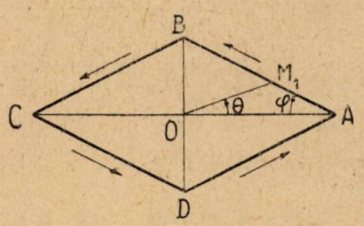


Fig. 1.

Alegem sistemul rectangular cu axele A C, B D și origina O.

Presupunem întâi că, mobilul pornește din A în momentul inițial ($t = 0$) și se mișcă în senzul săgeților fig. 1).

Fie, $\theta = \sphericalangle AOM$, unghiul format de A O cu raza vectoare a lui M, la un timp oarecare t.

Mișcarea fiind uniformă, avem $\theta = \omega t$, unde ω este viteza unghiulară, constantă.

Vom însemna M_i, poziția lui M la timpul corespunzător t_i, i indicând cadranul în care se află M

[1]) *V. Alaci.* „Trigonometria patratică", pag 237.

Deosebim următoarele faze:

Faza I: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

În triunghiul OAM_1, teorema sinusurilor ne dă:

$$\frac{AM_1}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin OM_1A}, \quad [OM_1A = \pi - (\theta + \varphi)],$$

deci

$$(A) \qquad \boxed{AM_1 = s = \frac{a \sin \omega t}{\sin(\omega t + \varphi)}}.$$

Avem astfel legea mișcării din faza I-a.

Derivând pe s în raport cu t de două ori succesiv, căpătăm pe rând viteza și accelerația:

$$v = \dot{s} = \frac{a\,\omega \sin\varphi}{\sin^2(\omega t + \varphi)},$$

$$\gamma = \ddot{s} = -\frac{2\,a\,\omega^2 \sin\varphi \cos(\omega t + \varphi)}{\sin^3(\omega t + \varphi)}.$$

Pentru a construi graficul spațiului și al vitezei, facem următorul tablou:

ωt	0		$\frac{\pi}{2} - \varphi$		$\frac{\pi}{2}$
s	0		$a\cos\varphi$		$\frac{a}{\cos\varphi}$
v	$\frac{a\,\omega}{\sin\varphi}$	+	$a\,\omega\sin\varphi$	+	$\frac{a\,\omega\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$
γ		−	0	+	

Graficul spațiului este:

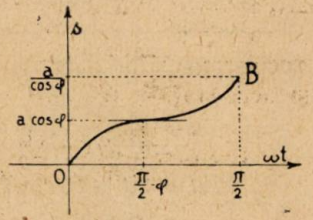


Fig. 2.

Graficul vitezei este:

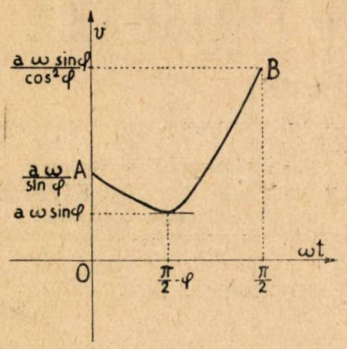


Fig. 3.

Faza II: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

Avem, (1) $s = AB + BM_2$, (2) $AB = \frac{a}{\cos\varphi}$.

În triunghiul OBM_2 (fig. 4), teorema sinusurilor ne dă:

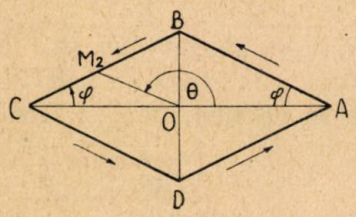


Fig. 4.

$$\frac{BM_2}{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{OB}{\sin \overset{\frown}{BM_2O}} \quad \begin{cases} OB = a\,\mathrm{tg}\,\varphi \\ \overset{\frown}{BM_2O} = \pi - (\theta - \varphi). \end{cases}$$

Deci

$$(3) \qquad BM_2 = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\varphi \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\theta - \varphi)}.$$

Relațiile (2) și (3), introduse în (1), dau

$$(B) \qquad \boxed{s = a\left[\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{\mathrm{tg}\,\varphi \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(\omega t - \varphi)}\right]}.$$

Viteza și accelerația sunt date de

$$\dot{s} = v = \frac{\omega a \sin\varphi}{\sin^2(\omega t - \varphi)},$$

$$\ddot{s} = \gamma = -\frac{2a\omega^2 \sin\varphi \cos(\omega t - \varphi)}{\sin^3(\omega t - \varphi)}.$$

Faza III: $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

Avem, (1) $s = 2AB + CM_3$, (2) $AB = \frac{a}{\cos\varphi}$.

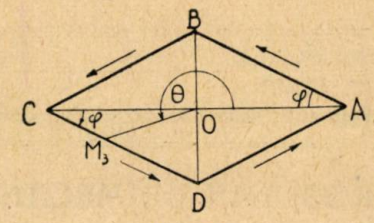


Fig. 5.

În triunghiul COM_3 (fig. 5), teorema sinusurilor ne dă

$$\frac{CM_3}{\sin(\theta - \pi)} = \frac{a}{\sin \overset{\frown}{CM_3O}}, \quad [\sphericalangle CM_3O = 2\pi - (\theta + \varphi)],$$

sau

$$(3) \qquad CM_3 = -\frac{a \sin(\theta - \pi)}{\sin(\theta + \varphi)}.$$

Relațiile (2) și (3), introduse în (1), dau

$$(C) \qquad \boxed{s = a\left[\frac{2}{\cos\varphi} - \frac{\sin(\omega t - \pi)}{\sin(\omega t - \varphi)}\right]}.$$

Viteza și accelerația sunt date de

$$\dot{s} = v = -\frac{a\omega \sin\varphi}{\sin^2(\omega t + \varphi)},$$

$$\ddot{s} = \gamma = \frac{2a\omega^2 \sin\varphi \cos(\omega t + \varphi)}{\sin^3(\omega t + \varphi)}.$$

Faza IV: $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$.

Avem, (1) $s = 3AB + DM_4$, (2) $AB = \frac{a}{\cos\varphi}$.

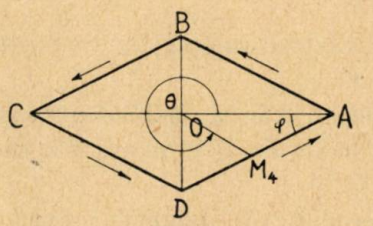


Fig. 6.

În triunghiul DOM_4 (fig. 6), teorema sinusurilor ne dă

$$\frac{DM_4}{\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{OD}{\sin \overset{\frown}{DM_4O}} \quad \begin{cases} OD = a\,\mathrm{tg}\,\varphi \\ \sphericalangle DM_4O = 2\pi - (\theta - \varphi), \end{cases}$$

deci

$$(3)\qquad D M_1 = -\frac{a \operatorname{tg}\varphi \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\theta-\varphi)}.$$

Relațiile (2) și (3) introduse în (1), ne dau

$$(D)\qquad \boxed{s = a\left[\frac{3}{\cos\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\omega t - \varphi)}\right]},$$

Viteza și accelerația sunt date de

$$\dot{s} = v = \frac{a\omega \sin\varphi}{\sin^2(\omega t - \varphi)},$$

$$\ddot{s} = \gamma = -\frac{2a\omega^2 \sin\varphi \cos(\omega t - \varphi)}{\sin^3(\varphi t - \varphi)}.$$

Faza n^a: $\dfrac{(n-1)\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{n\pi}{2}$.

Mobilul M se mișcă în cadranul al n-lea.

Fie M_n poziția sa la timpul t corespunzător și $\sphericalangle A O M_n = \theta = \omega t$.

$s = A B C D \ldots N M_n$ (N fiind al $(n-1)$ vârf, deci

$$s = (n-1) A B + N M_n.$$

Deosebim două cazuri:

a. *când n este impar;* b. *când n este par.*

a. În triunghiul $N O M_n$ (fig. 7) teorema sinusurilor ne dă:

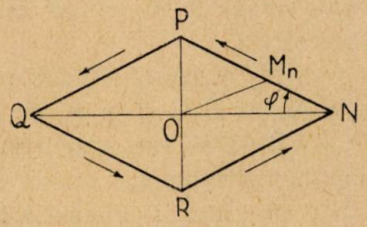


Fig. 7.

$$\frac{M_n N}{\sin[\theta - (n-1)\pi]} = \frac{a}{\sin \overset{\frown}{O M_n N}}$$

$$[O M_n N = 2n\pi - (\theta + \varphi)],$$

deci

$$M_n N = \frac{a \sin[\theta - (n-1)\pi]}{\sin[n\pi - (\theta + \varphi)]},$$

și atunci, avem

$$(E)\qquad \boxed{s = a\left[\frac{n-1}{\cos\varphi} + \frac{\sin[\omega t - (n-1)\pi]}{\sin[n\pi - (\omega t + \varphi)]}\right]},$$

care este legea generală a spațiilor pentru cadranele fără soț.

Dacă facem pe $n = 1, 3, 5 \ldots n$, căpătăm pe rând formulele (A), (C), ...

b. În triunghiul $O M_n N$ (fig. 8), teorema sinusurilor ne dă

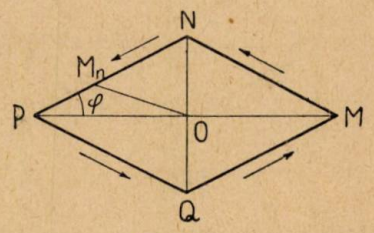


Fig. 8.

$$\frac{N M_n}{\sin\left[\theta - \frac{(n-1)\pi}{2}\right]} = \frac{O N}{\sin \overset{\frown}{O M_n N}},$$

$$\begin{cases} O N = a \operatorname{tg}\varphi \\ \sphericalangle O M_n N = \dfrac{n\pi}{2} - (\theta - \varphi), \end{cases}$$

sau

$$N M_n = \frac{a \operatorname{tg}\varphi \sin\left[\theta - \frac{(n-1)\pi}{2}\right]}{\sin\left[\frac{n\pi}{2} - (\theta - \varphi)\right]},$$

deci

$$(F)\qquad \boxed{s = a\left[\frac{n-1}{\cos\varphi} + \frac{a \operatorname{tg}\varphi \sin\left[\omega t - \frac{(n-1)\pi}{2}\right]}{\sin\left[\frac{n\pi}{2} - (\omega t - \varphi)\right]}\right]},$$

care e legea generală a spațiilor pentru cadranele cu soț.

Făcând pe $n = 2, 4, \ldots n$, avem pe rând, formulele (B), (D) ...

Presupunem acum că, mobilul M *ar porni dintr'un punct* A_1 *al laturi* AB, *diferit de* A.

Fie $\sphericalangle A O A_1 = \alpha$ (cunoscut).

Legea generală pentru cadranele fără soț, în cazul acesta, se capătă dacă din (E) scădem pe $A A_1$ și înlocuim θ prin $\theta + \alpha$.

În triunghiul $O A A_1$, teorema sinusurilor ne dă

$$A A_1 = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\varphi + \alpha)},$$

deci

$$(G)\quad s=a\left[\frac{n-1}{\cos\varphi}+\frac{\sin[\omega t+\alpha-(n-1)\pi]}{\sin[n\pi+\alpha-(\omega t+\varphi)]}-\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi+\alpha)}\right]$$

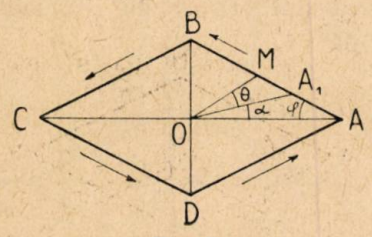


Fig. 9.

Legea spațiilor generală pentru cadranele cu soț, se capătă, dacă în (F) înlocuim θ prin $\theta+\alpha$ și scădem pe AA_1, deci

$$(H)\quad s=a\left[\frac{n-1}{\cos\varphi}+\frac{\operatorname{tg}\varphi\sin\left[\omega t+\alpha-(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{\sin\left[\frac{n\pi}{2}-(\omega t-\varphi+\alpha)\right]}-\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi+\alpha)}\right].$$

Dacă în toate aceste formule facem $\varphi=45^0$ dăm peste relațiile D-lui prof. *V. Alaci* căpătate în problema 212 din *„Trigonometria patratică"*.

ASUPRA ARTICOLULUI: O PROBLEMA DE MECANICĂ

DE

V. ALACI.

D-l *Dobrescu* studiază în acest articol din prezentul număr *„mișcarea unui punct material* M, *obligat să parcurgă conturul unui romb, când raza vectoare ce pleacă din centrul rombului are o mișcare uniformă"*.

D-sa stabilește formulele generale (E) și (F), valabile respectiv, când mișcarea are loc în cadranele impare ($n=1, 3, \ldots$), sau pare ($n=2, 4, \ldots$).

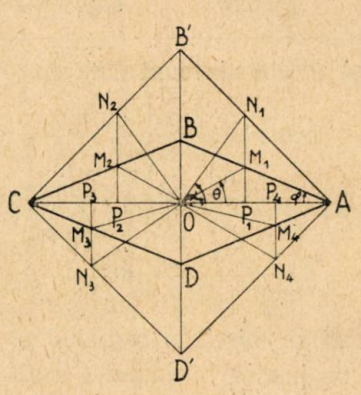
Voesc a da o altă soluție mai simplă acestei probleme și care are avantajul să prindă mișcarea, în cazul general, într'o singură formulă.

Vom folosi în acest scop cunoștinți de *„trigonometrie patratică"*, care se încadrează foarte bine în această problemă.

Fie dar rombul A B C D, cu semidiagonala $OA=a$ și $\sphericalangle OAB=\varphi$; apoi construim patratul A B′ C D′.

1. Presupunem că mobilul M pornește din A la momentul $t=0$ și ajunge în M_1 din primul cadran, la timpul t.

Ducem prin M_1 o perpendiculară pe O A, care întâlnește în N_1 pe AB′ și în P_1 pe O A.



Din triunghiul dreptunghic AP_1M_1, unde $s_1=AM_1$ este spațiul, deducem

$$(1)\qquad s_1=\frac{AP_1}{\cos\varphi}=\frac{P_1N_1}{\cos\varphi}=\frac{a\,sp\,\alpha_1}{\cos\varphi},$$

unde $\alpha_1=\sphericalangle AON_1$.

2. Presupunem că mobilul M pornind din A la timpul $t=0$, ajunge în M_2 din al 2-la cadran, la un timp oarecare t.

Ducem prin M_2 o perpendiculară pe O C, care întâlnește în N_2 pe B′ C și în P_2 pe O C. Observăm că, $s_2=AB+BM_2$ este spațiul corespunzător.

Din triunghiul dreptunghic A O B și din faptul că OP_2 este proecția ortogonală a lui BM_2 pe O C, deducem

$$AB=\frac{a}{\cos\varphi},\qquad BM_2=\frac{OP_2}{\cos\varphi}=-\frac{a\,cp\,\alpha_2}{\cos\varphi},$$

astfel că,

$$(2)\qquad s_2=\frac{a}{\cos\varphi}(1-cp\,\alpha_2),\text{ unde }\alpha_2=\sphericalangle AON_2.$$

3. Presupunem că mobilul M pornind din A la momentul inițial $t=0$, ajunge în M_3 din al 3-lea cadran la un timp oarecare t.

Ducem din M_3 o perpendiculara pe O C, care întâlnește în N_3 pe CD′ și în P_3 pe O C.

Observăm că, $s_3 = 2AB + CM_3$ este spațiul corespunzător.

Cum, $AB = \frac{a}{\cos\varphi}$, iar din triunghiul dreptunghic CP_3M_3, avem

$$CM_3 = \frac{CP_3}{\cos\varphi} = \frac{P_3N_3}{\cos\varphi} = -\frac{a\,sp\,\alpha_3}{\cos\varphi},$$

rezultă

(3) $\quad s_3 = \frac{a}{\cos\varphi}(2 - sp\,\alpha_3)$, unde $\alpha_3 = \sphericalangle AON_3$ măsurat în senz pozitiv de la OA.

4. Presupunem că mobilul M pornind din A la timpul $t = 0$, ajunge în M_4 din al 4-lea cadran la un timp oarecare t.

Ducem prin M_4 o perpendiculară pe OA, care întâlnește în N_4 pe D'A și în P_4 pe OA.

Observăm că, $s_4 = 3AB + DM$ este spațiul corespunzător.

Cum, $AB = \frac{a}{\cos\varphi}$, iar OP_4 este proecția ortogonală a lui DM_4, deci

$$DM_4 = \frac{OP_4}{\cos\varphi} = \frac{a\,cp\,\alpha_4}{\cos\varphi},$$

rezultă

(4) $\quad s_4 = \frac{a}{\cos\varphi}(3 + cp\,\alpha_4)$, unde $\alpha_4 = \sphericalangle AON_4$, măsurat în senz pozitiv de la OA.

5. Analog se stabilesc formulele, care exprimă legea mișcării și în cadranele următoare.

Este ușor de constatat că aceste legi parțiale de mișcare (1), (2), (3), (4), ..., care dau spațul s în funcție de timp, sunt cuprinse în legea generală

(5) $$\boxed{s = \frac{a}{\cos\varphi}\left[n - 1 + sp\left(\alpha - \frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right]},$$

pentru $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, n însemnând cadranul în care a ajuns mobilul M.

Poate că este necesar să invederăm cum intră timpul t în membrul al 2-lea al relației (5).

În adevăr, timpul t este cuprins în expresiunea unghiului $\alpha = \sphericalangle AOM_i (i = 1, 2, \ldots)$, în baza relației

(6) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad \text{unde } \theta = \omega t,$$

mișcarea fiind uniformă și ω fiind viteza unghiulară.

Relația (6), pentru primul cadran, adică când mobilul M ajunge în M_1 se stabilește astfel.

Din figură se observă că,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1N_1}{OP_1}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{P_1M_1}{OP_1},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P_1M_1}{AP_1} = \frac{P_1M_1}{P_1N_1}.$$

De aci rezultă,

$$\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{P_1N_1}{OP_1} = \operatorname{tg}\alpha,$$

tocmai relația (6).

Analog se arată că relația (6) are loc și în celelalte cadrane.

Observare. În cazul particular $\varphi = 45^0$, rombul ABCD devine un patrat, iar legea de mișcare (5) coincide cu acea din relația (204) din *„Trig. patratică"*, p. 240, ce am stabilit-o în cazul patratului, fiind că din (6) rezultă $\alpha = \theta = \omega t$.

Era și natural să fie astfel.

6. Țin să mulțumesc D-lui *Dobrescu* că mi-a dat prilejul să pun în lumină, odată mai mult, importanța cunoștințelor de *„trigonometrie patratică"*.

V. ALACI

NOTE MATEMATICE

20. — *Demonstrarea elementară a unei exprimări a numărului* π.

Scopul acestor rânduri e de a da o demonstrație elementară următoarei reprezentări analitice a numărului π

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=n}^{n} \frac{n}{n^2 + p^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Pentru aceasta, vom folosi neegălitățile

$$\operatorname{arctg}\frac{n}{n^2 + p(p+1)} < \frac{n}{n^2 + p^2} < \operatorname{arctg}\frac{n}{n^2 + p(p-1)},$$

arcele fiind luate între 0 și $\frac{\pi}{2}$.

Prima neegalitate este evidentă, iar a 2-a se poate pune sub forma

$$\frac{n}{n^2 + p^2} < \operatorname{arc\,sin}\frac{n}{\sqrt{n^2 + [n^2 + p(p-1)]^2}},$$

care rezultă din neegalitatea

$$\frac{n}{n^2+p^2} < \frac{n}{\sqrt{n^2+[n^2+p(p-1)]^2}}$$

lesne de verificat. Prin urmare, avem

$$\operatorname{arctg}\frac{p+1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{p}{n} < \frac{n}{n^2+p^2} < \operatorname{arctg}\frac{p}{n} - \operatorname{arctg}\frac{p-1}{n},$$

deci

$$\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n} < \sum \frac{n}{n^2+p^2} < \frac{\pi}{4}.$$

Făcând pe n să crească nemărginit, obţinem egalitatea anunţată.

Egatităţile de natura, celei considerate aici se încadrează într'o metodă generală datorită lui *Cauchy*. Noi am vrut să punem în evidenţa o metodă elementară.

TH. ANGHELUTA

21. — *Asupra problemei 1322.*

Această problemă, în care se cereau numerele ce au ca indicator pe $1440=2^5.3^2.5$, mai are şi alte soluţii, în afară de $N=5400$. În adevăr, formula generală

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda,$$

$$\varphi(N) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots l^{\lambda-1} (a-1)(b-1)\ldots(l-1)$$

arată că putem lua ca divizori primi ai lui N şi numere de forma $2^m.3^n.5^p+1$, unde m, n, p nu întrec respectiv pe 5, 2, 1. Avem astfel, pentru N, descompuneri de forma

$$N = 2^\alpha.3^\beta.5^2,\quad 2^\alpha.3^\beta.5^2.7,\quad 2^\alpha.3^\beta.5^2.13,$$
$$2^\alpha.3^\beta.5^2.19,\quad 2^\alpha.3^\beta.5^2.73,\quad 2^\alpha.3^\beta.11,$$
$$2^\alpha.3^\beta.7.11,\quad 2^\alpha.2^\beta.11.13,\quad 2^\alpha.3^\beta.5^2.7.13,$$
$$2^\alpha.3^\beta.41,\quad 2^\alpha.3^\beta.7.31,\quad 2^\alpha.3^\beta.13.31,\ \text{etc},$$

care duc la soluţiile

$$N = 5400,\ 6300,\ 5850,\ 4752,\ 5544,$$
$$5148,\ 3800,\ 4428,\ 5208,\ 4836$$

şi poate mai sunt şi altele.

M. G.

CHESTIUNI PROPUSE LA EXAMENUL DE ADMITERE IN ŞCOALA POLITECHNICĂ TIMIŞOARA, 1942.

GEOMETRIE PLANĂ ŞI IN SPAŢIU

1. Se consideră un cerc de centru O şi de rază R şi un diametru fix Ox al acestuia. O dreaptă AB, de lungime egală cu raza R, se mişcă, aşa fel ca A să descrie axa Ox iar B cercul O. In punctul A se duce perpendiculara pe Ox, care întâlneşte pe OB în M. Se cere:

a. Să se calculeze AM în funcţie de $OA = 2u$:

b. Fie N punctul de pe AB, situat între A şi B şi la distanţa b de A, iar P şi Q punctele unde perpendiculara în N pe Ox, tae pe Ox şi pe OB. Să se calculeze raportul PQ : PN, arătând că este constant când AB variază ca poziţie, păstrând însă o lungime constantă R.

c. Să se afle locul lui Q ,precum şi al lui M.

d. Se poate deduce locul lui P din cunoaşterea locului lui Q ?

2. Se dau două cercuri exterioare O şi O', de raze R şi R; să se găsească pe linia centrelor un punct M, astfel ca, ducând tangentele MC, MC' la cele două cercuri, suma ariilor calotelor născute de arcele BC, B C prin rotirea în jurul liniei centrelor să fie πa unde a este dat, iar AB, A'B' sunt diametrii celor două cercuri, situaţi pe linia centrelor. Se presupune, bineînţeles, că distanţa centrelor $OO = d$ este cunoscută.

Dacă se ia $OM = x$ ca necunoscută, se obţine o ecuaţie de gradul al 2-lea. Să se arate că aceasta are totdeauna rădăcinele reale. Să se discute numărul poziţiilor punctului M. Să se determine cazurile când există o singură poziţie.

(11 Octomvrie, orele 8—11).

GEOMETRIE ANALITICĂ.

1. Fie Ox, Oy două axe perpendiculare una pe alta; A şi B două puncte fixe respectiv pe Ox şi Oy, M un punct variabil pe Oy; N mijlocul segmentului AM, P punctul de intersecţie al dreptei BN cu axa Ox; R punctul de intersecţie al perpendicularelor în P şi M respectiv pe Ox şi Oy.

a. Să se găsească locul punctului R.

b. Să se facă schimbarea axei Ox, astfel ca ecuaţia locului să fie cea mai simplă şi caracteristică.

c. Să se construiască apoi locul punctului R, determinându-se elementele prin construcţii grafice exacte.

2. Fie două axe Ax, Ay, perpendiculare una pe alta; o parabolă (P) cu vârful în A şi tangentă la axa AY; un punct fix I pe axa Ay. Să se găsească locul punctului de contact M al celei de a doua tangente dusă din

I la parabola (P), când focarul parabolei se mişcă pe axa A X.

(11 Octomvrie, orele 15—18).

ALGEBRĂ.

1. Să se determine constantele A şi k astfel ca funcţia

$$y = A x^2 - \log(1 + x^2) + k \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 1}$$

să admită un maxim pentru $x = 1$ şi un minim pentru $x = 2$.

2. Să se determine intervalele în care poate varia λ astfel ca ecuaţia

$$x^3 - 3x^2 - 3x + \lambda^2\sqrt{2} + 5 = 0$$

să admită toate rădăcinele reale.

In urmă, să se determine λ astfel ca ecuaţia dată să admită o rădăcină dublă.

3. Se dă ecuaţia

$$x^2 + ax + 2 = 0$$

cu rădăcinele x_1 şi x_2.

Se cere să se formeze ecuaţia de gradul al 2-lea cu rădăcinele y_1, y_2 date de relaţiile

$$y_1 = 2 - \frac{1}{x_1^3 - 7}, \qquad y_2 = 2 - \frac{1}{x_2^3 - 7}.$$

Să se determine a astfel ca ecuaţia de gradul al 2-lea în y să admită rădăcina $y_1 = 1$

(12 Octomvrie, orele 8—11).

TRIGONOMETRIE.

1 Dintr'un punct C, un segment de dreaptă $\overline{AB}$ se vede sub un unghiu γ. Să se determine distanţa de la punctul C la dreapta A B, ştiind că

$$\overline{AB} = c = 323\ m, \quad \hat{C} = \gamma = 83^0, 38', 25'',$$
$$a - b = 85\ m, \quad \text{unde} \quad BC = a, \quad AC = b.$$

2. Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 \\ \operatorname{tg}(x + y) = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

3. Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia

$$E = \sin 2(\beta - \alpha) + \sin 2(\gamma - \beta) + \sin 2(\alpha - \gamma).$$

4. Să se arate că expresia

$$E = \cos(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha) + \cos(\beta + \gamma)\sin(\gamma - \beta) + \cos(\gamma + \alpha)\sin(\alpha - \gamma),$$

este identic nulă.

(11 Octomvrie, orele 3—6).

In loc de examen oral, s-au dat înscris următoarele chestiuni.

GEOMETRIE PLANĂ ŞI IN SPAŢIU.

1. Să se afle măsura unui unghiu, după poziţia pe care o poate avea faţă de un cerc.

2. Dacă într'un patrulater convex A B C D unghiurile opuse B, D sunt egale, atunci biserctoarele unghiului B A D formează cu prelungirile laturilor C B şi C D triunghiri isoscele. Să se mai demonstreze că bisectoarele unghiurilor B A D şi B C D sunt paralele.

3. Pe laturile opuse A B, C D ale unui paralelogram se construesc **în afară** două triunghiuri echilaterale A B M C D P, iar pe laturile opuse B C, D A se construesc **înăuntru** triunghiurile echilaterale B C N, D A Q. Să se arate că figura M N P Q este un paralelogram ale cărui laturi sunt egale cu diagonalele paralelogramului A B C D.

4. Unui cerc O i se duce o tangentă A B, mărginită de alte două tangente paralele. Să se arate că unghiul A O B este drept.

5. Să se ducă o dreaptă care să întâlnească trei drepte date, D_1, D_2, D_3 nesituate două câte două în acelaş plan. Câte astfel de drepte se pot duce ?

6. Se duce un plan Q printr'o dreaptă D, paralelă la un plan P. Să se arate că intersecţia planelor P şi Q este o dreaptă paralelă la D.

7. Să se arate că trei plane, neparalele două câte două, se întâlnesc într'un punct sau au intersecţiile paralele două câte două.

8. Să se arate că intersecţie unui plan cu o sferă este un cerc.

(11 Octomvrie, orele 8—11).

GEOMETRIA ANALITICĂ.

1. Proprietatea tangentei (sau normalei) la elipsă şi iperbolă. Cum se transformă această proprietate pentru parabolă ?

Construirea grafică a tangentei la **elipsă, iperbolă, parabolă.**

2. Proecţia ortogonală a cercului pe un plan trecând prin centrul lui. Să se deducă o construcţie a tangentei la elipsă în un punct dat. Asemenea să se deducă aria elipsei.

Construirea focarelor elipsei, cunoscând dreptunghiul axelor; construirea directoarei corespunzătoare unui focar. (Tangenta în punctul elipsei, care are aceiaşi absciză cu focarul, trece prin piciorul directoarei corespunzătoare).

3. Dându-se mărimea axei transverse şi unghiul asimptotelor unei iperbole, să se construiască: **focarele** şi **directoarele** corespunzătoare; cinci puncte ale iperbolei şi tangentele ei în aceste puncte.

Ce proprietate trebue să aibă iperbola, ca să fie echilateră ?

4. Ax radical: definiţie geometrică, ecuaţie lui.

A doua definiţie (proprietate) a axului radical.

Centru radical. Construirea grafică a axului radical a două cercuri, considerându-se toate cazurile de poziţie relative a unui cerc faţă de cellalt.

5. Să se dea diferitele definiţii geometrice ale elipsei socotită ca loc geometric al unui punct din plan şi să se deducă, pentru fiecare în parte, ecuaţia elipsei, precum şi construcţia grafică corespunzătoare.

(Două chestii la alegere).

(13 Octomvrie, orele 3—6).

ALGEBRĂ.

1. Să se rezolve ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 4-x & 6 \\ 3 & 6 & 9-x \end{vmatrix} = 0.$$

2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

3. Pentru ce valori a lui x avem

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 \quad 5x + 4} < 0.$$

4. Să se afle limita expresiei

$$E = \sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 1} - x,$$

pentru $x = \infty$.

5. Să se stabilească formula

$$1 + (C_p^1)^2 + (C_p^2)^2 + \cdots + (C_p^p)^2 = C_{2p}^2,$$

unde C_n^m înseamnă numărul combinărilor de m obiecte luate câte n

6. Să se stabilească expresia derivatei funcţiei

$$y = \operatorname{arc\,tg} x.$$

7. Să se rezolve ecuaţia

$$x^4 - 3x^3 + 8x - 24 = 0.$$

ştiind că admite rădăcina imaginară $1 - i\sqrt{3}$.

(14 Octomvrie, orele 8—10½).

TRIGONOMETRIE.

1. Să se găsească expresia razelor R a cercului circumscris, r a cercului înscris şi r_a, r_b, r_c a cercurilor exînscrise triunghiului A B C. (Se alege una din ele).

2. Să se arate care sunt cazurile de rezolvare a triunghiurilor oarecare. Să se stabilească formulele pentru un caz la alegere.

3. Să se stabilească expresia ariei S a unui triunghiu oarecare A B C.

4. Să se facă calculabilă prin logaritm una din expresiile

$$\sin p + \cos q; \quad 1 + \sin \alpha; \quad 1 + \operatorname{tg} \beta.$$

5. Să se rezolve unul din următoarele sisteme

$$\begin{cases} \sin x \sin y = m \\ \cos x \cos y = n \end{cases}; \qquad \begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \end{cases};$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m \\ \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{2} = n. \end{cases}$$

(14 Octomvrie, orele 4—6).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, Nr. 2, Octomvrie 1942. Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plautius Andronescu*. Un loc geometric elementar, de G-l *Gh. Buicliu*. Proprietăţi ale numerelor prime cu un număr dat, de C-dor *I. Linteş*. *Concursul „Gazetei Matematice"* din 1943. Note Matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *A. Maior*. Zur Mehrfachtelephonie mittels Strömen hoher Frequenz. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, T. V, 1941.)

3. *A. Maior*. La gravitation et la variation des quelques „constantes" fondamentales. (Académie Roumaine, Bulletin de la Section Scientifique, T. XXIV, 1942).

4. *Ioan Curea*. Determinarea polului ceresc pe cale astrologică. (Teză.)

5. *Ioan Curea* O eclipsă de soare în anul 1927.

6. *Ioan Curea*. Corecţiuni diferenţiale în pol.

7. *Ioan Curea*. Staţiunea seismică a observatorului din Cluj.

8. *Ioan Curea*. Eclipsa de soare din 29 Iunie 1927.

9. *Ioan Curea*. Sur un cas spécial de réfraction différentielle.

10. *Ioan Curea*. Ratachement de deux clichés dont les centres coïncident avec les pôles céleste de deux dates différentes.

11. *Ioan Curea*. Astrographische Bestimmung der Lage des Himmelspoles.

12. *Ioan Curea*. Anwendung der Brusschen Methode der Teilungsfehlerbestimmung.

13. *Ioan Curea* Bulletin Séismique.

14. *Ioan Curea*. Memoriu de titluri şi lucrări.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1489. — *Să se găsească un număr de patru cifre, care împărţit cu numărul format de ultimele sale două cifre, să ne dea un patrat perfect.*

GH. CONSTANTINESCU.

Soluţie. Dacă a este un număr de două cifre, iar b cel mult de două cifre, atunci conform enunţului trebuie să avem

$$100a + b = \alpha^2 . b, \quad \text{sau} \quad (1) \quad 100a = (\alpha^2 - 1)b.$$

Vom lua pentru α^2, acele patrate perfecte mai mici ca 10000, pentru care $\alpha^2 - 1$ are cel puţin un divizor 2, sau 5, şi este cel puţin de două cifre, căci numai astfel ar putea fi satisfăcută relaţia pentru $b < 100$.

În acest scop luăm în cercetare următoarele cazuri:

1°. $\alpha^2 = 16$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 15\,b$, sau $20\,a = 3\,b$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută numai pentru

$a = 12$, $b = 80$.

Avem astfel soluția 1280.

2°. $\alpha^2 = \mathbf{25}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 24\,b$, sau $25\,a = 6\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$a = 12$, $b = 50$;
$a = 18$, $b = 75$.

Avem astfel soluțiile,

1250, 1875.

3°. $\alpha^2 = \mathbf{36}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 35\,b$, sau $20\,a = 7\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$a = 14$, $b = 40$;
$a = 21$, $b = 60$;
$a = 28$, $b = 80$.

Avem astfel soluțiile:

1440, 2160, 2880.

4°. $\alpha^2 = \mathbf{49}$. In acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 48\,b$, sau $25\,a = 12\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$a = 12$, $b = 25$;
$a = 24$, $b = 50$;
$a = 36$, $b = 75$.

Avem astfel soluțiile

1225, 2450, 3675.

5°. $\alpha^2 = \mathbf{81}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 80\,b$, sau $25\,a = 20\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$a = 20$, $b = 25$;
$a = 40$, $b = 50$;
$a = 70$, $b = 75$

Avem astfel soluțiile,

2025, 4050, 6075.

6°. $\alpha^2 = \mathbf{121}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 120\,b$, sau $5\,b = 6\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

a	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96
b	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80

Avem astfel soluțiile

1210, 1815, 2420, 3025, 3630, 4235, 4840, 5445, 6050, 6655, 7260, 7865, 8470, 9075, 9680.

7°. $\alpha^2 = \mathbf{169}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 168\,b$, sau $25\,a = 42\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$a = 42$, $b = 25$;
$a = 84$, $b = 50$.

Avem astfel soluțiile

4225, 8450.

8°. $\alpha^2 = \mathbf{196}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 195\,b$, sau $20\,a = 39\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$a = 39$, $b = 20$;
$a = 78$, $b = 40$.

Avem astfel soluțiile

3920, 7840.

9°, $\alpha^2 = \mathbf{225}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 224\,b$, sau $25\,a = 56\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$a = 56$, $b = 25$.

Avem astfel soluția 5625.

10°. $\alpha^2 = \mathbf{256}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$100\,a = 225\,b$, sau $20\,a = 51\,b$,

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$a = 51$, $b = 20$.

Avem astfel solutia 5120.

11°. $\alpha^2 = \mathbf{289}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 288\,b, \quad \text{sau} \quad 25\,a = 72\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$a = 72, \qquad b = 25.$$

Avem astfel soluția 7225.

12°. $\alpha^2 = \mathbf{361}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 360\,b, \quad \text{sau} \quad 5\,a = 18\,b,$$

relație care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$\begin{aligned} a &= 18, & b &= 5; \\ a &= 36, & b &= 10; \\ a &= 54, & b &= 15; \\ a &= 72, & b &= 20; \\ a &= 90, & b &= 25. \end{aligned}$$

Avem astfel soluțiile

1805, 3610, 5415, 7220, 9025.

13°. $\alpha^2 = \mathbf{441}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 440\,b, \quad \text{sau} \quad 5\,a = 22\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$\begin{aligned} a &= 22, & b &= 5; \\ a &= 44, & b &= 10; \\ a &= 66, & b &= 15; \\ a &= 88, & b &= 20. \end{aligned}$$

Avem astfel soluțiile

2205, 4410, 6615. 8820.

14°. $\alpha^2 = \mathbf{529}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 528\,b, \quad 25\,a = 132\,b,$$

relație, care în condițiile problemei n'are soluție.

15°. $\alpha^2 - \mathbf{576}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 575\,b, \quad \text{sau} \quad 4\,a = 23\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$\begin{aligned} a &= 23, & b &= 4; \\ a &= 46, & b &= 8; \\ a &= 69, & b &= 12; \\ a &= 92, & b &= 16. \end{aligned}$$

Avem astfel soluțiile

2304, 4608, 6912, 9216.

16°. $\alpha^2 = \mathbf{625}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 624\,b, \quad \text{sau} \quad 25\,a = 156\,b,$$

relație, care în condițiile problemei n'are soluție.

17°. $\alpha^2 = \mathbf{676}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 675\,b, \quad \text{sau} \quad 4\,a = 27\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$\begin{aligned} a &= 27, & b &= 4; \\ a &= 54, & b &= 8; \\ a &= 81, & b &= 12. \end{aligned}$$

Avem astfel soluțiile

2704, 5408, 8112.

18°. $\alpha^2 = \mathbf{729, 1089, 1639, 1849, 2209, 2809, 3249, 3969, 4489, 5329, 5929, 6889, 7569, 8649 9409}$, nu dau soluție.

19°. $\alpha^2 = \mathbf{841}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 840\,b, \quad \text{sau} \quad 5\,a = 42\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$\begin{aligned} a &= 42, & b &= 5; \\ a &= 84, & b &= 10. \end{aligned}$$

Avem astfel soluțiile

4205, 8410.

20°. $\alpha^2 = \mathbf{961}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 960\,b, \quad \text{sau} \quad 5\,a = 48\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$\begin{aligned} a &= 48, & b &= 5; \\ a &= 96, & b &= 10. \end{aligned}$$

Avem astfel soluțiile

4805, 9610.

21°. $\alpha^2 = \mathbf{1156, 1225, 1296}$, nu dau soluții.

22°. $\alpha^2 = \mathbf{1521}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 1520\,b, \quad \text{sau} \quad 5\,a = 76\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$a = 76, \qquad b = 5.$$

Avem astfel soluția 7605.

23°. $\alpha^2 = \mathbf{1681}$. În acest caz egalitateta (1) devine

$$100\,a = 1680\,b, \quad \text{sau} \quad 5\,a = 84\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$a = 84, \qquad b = 5.$$

Avem astfel soluția 8405.

24°. $a^2 = \mathbf{1936, 2025}$, nu dau soluții.

25°. $a^2 = \mathbf{2401}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 2400\,b, \qquad \text{sau} \qquad a = 24\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$a = 24, \qquad b = 1;$$

$$a = 48, \qquad b = 2;$$

$$a = 72, \qquad b = 3;$$

$$a = 96, \qquad b = 4.$$

Avem astfel soluțiile

2401, 4802, 7203, 9604.

26°. $a^2 = \mathbf{2601}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 2600\,b, \qquad \text{sau} \qquad a = 26\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$a = 26, \qquad b = 1;$$

$$a = 52, \qquad b = 2;$$

$$a = 78, \qquad b = 3.$$

Avem astfel soluțiile

2601, 5202, 7803.

27°. $a^2 = \mathbf{2916, 3025, 3136, 3481, 3721, 4096, 4225, 4356, 4761, 5041, 5476, 5625, 5776, 6241, 6561, 7056, 7225, 7396, 7921, 8281, 8836, 9025, 9216}$, nu dau soluții.

28°. $a^2 = \mathbf{9801}$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$100\,a = 9800\,b, \qquad \text{sau} \qquad a = 98\,b,$$

relație, care în condițiile problemei este satisfăcută pentru

$$a = 98, \qquad b = 1.$$

Avem astfel soluția 9801.

Problema admite în total 64 de soluții.

Soluții date de d-nii: *Ripeanu Andrei* (61 soluții, prin încercări), *Kornis Ernest* (17 soluții), *Tilică C. Ștefan* (12 soluții), *Cazonacli V. Petre* (8 soluții), *Matei D D-tru* (8 soluții), *Comloșan Cornelia* (o soluție) și *Vlad M. C. I.* (o soluție).

Problema 1664. — *Să se arate că în orice triunghiu avem relația*

$$c = \frac{a + b(\sin C - \cos C)}{\sin B + \cos B},$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

V. ALACI.

Soluție. Ținând seamă de relația cunoscută

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

membrul al 2-lea al relației date, notat cu E, devine

$$(1) \quad E = \frac{b\cos C + c\cos B + b(\sin C - \cos C)}{\sin B + \cos B} = \frac{c\cos B + b\sin C}{\sin B + \cos B}.$$

Cum,

$$c = 2R\sin C, \qquad b = 2R\sin B,$$

relația (1) se mai poate scri

$$E = \frac{2R\sin C\cos B + 2R\sin B\sin C}{\sin B + \cos B} = \frac{2R\sin C(\cos B + \sin B)}{\sin B + \cos B} = 2R\sin C = c,$$

tocmai relația cerută.

Soluții date de d-rele *Checian N. Ana* (studentă, Timișoara), *Papadopol D. Elena* (Bacău) și de d-nii: *Aldea V. Mircea* (Lic., Buzău), *Andrievici N.* (Lic. Milit. „N. Filipescu"), *Aristeanu H* (Lic. „Lazăr", București), *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara), *Borneas Marius* (Lic. Arad), *Buznea D. Dinu* (Lic. Milit. „N. Filipescu"), *Cetățeanu Stelian* (Lic. „Sincai", București), *Cristea I. Nicolae* (Lic, Blaj), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Diaconescu D. Ion* (Lic., T-Severin), *Dragon I. Gheorghe* (Ploești), *Gligor N. Ioan* (Lic., Arad), *Gloden A.* (Luxemburg), *Ionescu F. Petre* (Lic. Milit, Craiova), *Jidanu I. C.* (Polit., Timișoara), *Jipescu N. Nicolae* (Lic. Milit. „N. Filipescu"), *Lepolszky Carol, Luca I Ioan* (Lic. Arad), *Lupescu Cornelîu* (S-Lt.), *Matei I. Augustin* (student, Cluj), *Mironescu I. D-tru* (Lic. Milit., Tg.-Mureș), *Modâlcă S Emil* (Lic., T-Severin), *Mureșan I. Octav* (Lic, Arad), *Murgu V. Marțian* (Polit., Timișoara), *Musca M. Miron* (Lic., Arad), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popa Mircea* (Lic Milit., Iași), *Popescu Adrian* (S-Lt.), *Rohr I Alexandru* (Lic. Milit., Iași), *Șandor Vasile, Segal Zoe* (București) *Segal Zigu* (Lic., Vaslui), *Șelmereanu H.* (Lic., Orăștie), *Slavov Iacob* (Bolgrad), *Soceanu Eugen* (Lic., Piatra-Neamț) *Stamate I. Ionel* (student în matematici), *Stefănescu F. Marin* (S-Lt), *Stoenescu D. Mirel* (Lic. Milit. „N. Filipescu"), *Tătaru Alexandru* (Lic., Orăștie) *Theodorescu N. Do.in* (Școala Navală), *Tilică C. Stefan, Topalescu S. Gh.* (Lic. Milit., T.-Mureș), *Turcu R. Sandu* (Lic. Milit., Iași), *Vasiliu D-tru* (Lic. Milit., Timișoara) și *Venter D-tru* (Lic., Beiuș).

Problema 1931. — *Să se găsească patratele perfecte de forma* $abcde$ *şi* $edcba$ *ştiind că*

$$a+b=d+e=c$$

şi că $a+b+c+d+e$ *este un patrat perfect*

S Lt. Gh. Pitulescu.

Avem conform enunţului

$$a+b+c+d+e=3c=m^2\leq 27$$

$\ast\ast\ast$ $3c=0$, cu $c=0$ şi $3c=9$ cu $c=3$.

Cazul $c=0$ trebue eliminat căci, pe baza egalităţilor din enunţ conduce la $a=b=c=d=e=0$,

Rămâne deci

$$a+b=d+e=3. \tag{1}$$

Cum atât a cât şi e sunt terminaţii de patrate. şi după (1), mai mici ca 3, rezultă că se poate avea

$$a=0;\quad 0;\quad 1;\quad 1$$

$$e=0;\quad 1;\quad 0;\quad 1.$$

Dacă însă a sau e este nul, atunci trebue ca şi b sau d să fie nuli, pentrucă $abcde$ şi $edcba$ sunt patrate perfecte. Dar aceste egalităţi simultane nu pot avea loc după (1). Deci $a\neq 0$ şi $e\neq 0$, şi rămân numai valorile

$$a=e=1$$

care împreună cu (1) dau

$$b=d=2.$$

Deci numerile căutate sunt egale între ele şi egale cu

$$12321=111^2.$$

S-au primit soluţii bune dela D-nii: *Bakonyi C.* (Bacalaureat, Timişoara); *Filip Gk. P.* (Şc. „Ştirbey", Câmpina); *Ieşan Şt. Al.* (Şc. „Matei Basarab", Bucureşti); *Ionescu F. P.* (Şc. „Carol I", Craiova); *Luca L. L.* (Şc. „Moise Nicoara, Arad); *Manolache C. M.*, *Ţarălungă S.* (Şc Internat, Iaşi) şi *Tica P. M*

G-l Gh. B.

PROBLEME PROPUSE

2082. — Să se găsească un patrat perfect de forma $abccda$, unde c şi da sunt patrate perfecte, iar $ba=da+10$.

Elena D. Papadopol

2083. — Să se arate că

$$(S_3-S_1)(S_4+5S_2)=(S_4-S_2)(S_3+4S_1),$$

unde $S_p=1^p+2^p+\cdots+n^p$.

Ionel I. Stamate

2084. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{3\sqrt{x}+x\sqrt{3}}{3\sqrt{x}+x\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{x}-x\sqrt{3}}{3\sqrt{x}-x\sqrt{3}}=\sqrt{50x}.$$

Ioan N Gligor

2085. — Să se determine intervalele în care poate varia λ astfel ca ecuaţia

$$x^3-3x^2-3x+\lambda^2\sqrt{2}+5=0$$

să admită toate rădăcinele reale.

În urmă, să se determine λ astfel ca ecuaţia dată să admită o rădăcină dublă.

V. Alaci

2086. — Fie M un punct pe ipotenuza B C a triunghiului dreptunghic B A C şi N proecţia lui pe A C. Să se arate că raportul între M N şi suprafaţa triunghiului B N C este independent de poziţia lui M pe B C.

G-l Gh Buicliu

2087. — Pe latura A B a dreptunghiului A B C D se ia un punct variabil M. Dreptele C M şi D M intersectează respectiv laturile A D şi B C în punctele N şi P.

Să se demonstreze că aria triunghiului M N P este constantă şi egală cu jumătatea ariei dreptunghiului.

Eugen Wegener

2088. — Să se stabilească identitatea

$$2\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos 2\alpha\sin^2\alpha=1.$$

Hermann Knopf

2089. — Într'un triunghiu oarecare A B C, avem relaţia:

$$(1-\sec A)(1-\sec B)(1-\sec C)=2r\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}{a+b+c}.$$

Eugen I. Sipos

ŞCOALA POLITEHNICĂ TIMIŞOARA

Candidaţii reuşiţi la examenul de admitere în anul I, în ordinea clasificaţiei

(Anul şcolar 1942 - 1943)

1. Tatar M. Nicolae
2. Andreescu G. Ioan
3. Cristea D. Viorel
4. Bighea I. Ioan
5. Creţa F. Gavril
6. Barbu St. Virgil
7. Bitang A. Alexandru
8. Luca L. Laurenţiu
9. Jura M. Cornel
10. Metineu I. Gheorghe
11. Popa V. Traian
12. Teodorescu A. Silviu
13. Moldovan T. Teodor
14. Andronescu Gr. Grigore
15. Ilea T. Ioan
16. Dămătarcă A. Ioan
17. Flueraş I. Viorica
18. Ionică F. Ioan
19. Lupu St. Dionisie
20. Teodorescu Al. Jean
21. Bogdănescu P. Cornel
22. Pribac Gh. Gheorghe
23. Sigmund R. Gerhard
24. Turicu T. Octavian
25. Iorgulescu C. Mircea
26. Niţescu V. Voicu
27. Petcu H. Ionel
28. Tămaş Fr. Alexandru
29. Vinţan I. Livius
30. Ivănescu C. Ioan
31. Matei D. Vasile
32. Mahalachis I. Isidor Iuliu
33. Mercea V. Victor
34. Segărceanu N. Constantin
35. Sora St. Constantin
36. Sotău S. Iosif
37. Tăutu C. Ioan Aug.
38. Băncescu M. Radu Şerban
39. Balica I. Vasile
40. Bălan I. Nicolae
41. Stoian I. Partenie
42. Gologan M. Gheorghe
43. Rösler B. Francisc Cornel
44. Tocan Il. Nicolae
45. Zoicas I. Aurel
46. Biriescu A. Alex.
47. Frenţiu S. Pavel
48. Biristeică P. Nicolae
49. Nenu D. Vasile
50. Scodihor I. Gheorghe
51. Popovici I. Mircea Gh.
52. Recean D. Cleopatra Narcisa
53. Şoşdean R. Iosif
54. Mircea S. Liviu
55. Chevereşan Şt. Ioan
56. Iancu Tr. Traian
57. Ion I. Ioan
58. Pescar I. Ioan
59. Popa St. Alexandru
60. Sigmund R. Erich
61. Drăcea G. Constantin
62. Friş R. Sept. Mircea
63. Mureşan A. Valeriu
64. Robu St. Eugen
65. Anghel M. Nicu
66. Danciu I. Gheorghe
67. Golea N. Emil
68. Halmagiu A. Axente
69. Toma I. Ştefan
70. Dancu I. Ionel
71. Ilieş N. Nicolae
72. Recean M. Dumitru
73. Ciomoş St. Ştefan
74. Murărescu C. Emil
75. Urcan P. Gavrilă
76. Wilhelm F. Fridrich
77. Miclescu I. Ioan
78. Popescu P. Grigore
79. Stroia Il. Ioan
80. Balaban G. Virgil
81. Cavaropol T. Petru
82. Simon Al. Horaţiu
83. Stănescu N. Gheorghe
84. Verca S. Corneliu
85. Morariu A. Dorin C-tin
86. Panait M. Nicolae Mihail
87. Riţu V. Vasile
88. Vasiliu M. Aristotel
89. Makamul I. Francisc
90. Oltcanu Gr. Ioan
91. Pâlşan P. Victor
92. Badea Al. Dumitru
93. Diaconescu Gr. Valeriu
94. Dumitrescu N. Virgil Marcel
95. Matchevici Al. Dtru
96. Rusu N. Nicolae
97. Toader Ad. Remus
98. Curaevschi M. Nicodin
99. Enache M. Gheorghe
100. Gerhardt C. Tudor
101. Sandu-Graboveanu G. Robinson
102. Chiriţescu P. Pandele
103. Măcean G. Miliutin
104. Bastorescu V. Nicolae
105. Ghenghea P. Teodor
106. Guia Gh. Gheorghe
107. Muntean I. Ioan
108. Oarcea Av. Adrian
109. Tulbure I. Aurel
110. Fernea I. Dumitru
111. Muleancă G. Alexandru
112. Popescu N. Mihalache
113. Procopovici G. Virgil
114. Radivoi D. Titus
115. Stoian G. Savu
116. Voronca Al. Horea Alex.
117. Pauli I. Beno
118. Roşca D. Nicolae
119. Stalevschi A. Ctin
120. Vasilescu V. Ioan
121. Albert F. Otto
122. Aştilean G. Ioan
123. Bonciu M. Nestor
124. Budac O. Traian
125. Hoch I. Aurel
126. Iwencz F. Francisc
127. Jovmir V. Petre
128. Lăzăriciu V. Liviu
129. Marinescu T. Nicolae
130. Mănescu C. Nicolae
131. Negruţiu I. Ion Silviu
132. Nica P. Virgil
133. Perszen A. Policarp
134. Piso A. Aurel
135. Popescu T. Ovidiu
136. Prisacaru I. Dumitru
137. Roşu Cornel
138. Tătucu M. Petru
139. Tobescu G. Manel

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié: 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés.

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacția „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timișoara.
2. *Corneliu N. Popescu,* profesor, Str. Piscului 6, București V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareș No. 41, Piatra-Neamț,
4. *Dr. Mihail Șt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamț.

În prezent „*Boletin Matematico*", nu îl primim.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenții, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Legându-se colecțiile R. M. T., anii I—XXI, în volume și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XXI, cu prețul de lei 200 volumul și se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată trebuie să fie, scrisă aparte și să nu se continue cu alte probleme, căci nu se pot repartiza la numerile corespunzătoare, deci nu pot fi luate în seamă.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

ANUL XXII. DECEMVRIE 1942 No. 10.

I-10

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **M. GHERMANESCU:** ECUATIA A D-BC=1 IN INTREGI.

2. **O. N. TINO:** ASUPRA ECUATIEI NEDETERMINATE (1) $xy = a(x+y)+1$.

3. **N. ABRAMESCU:** ASUPRA UNEI PROBLEME A D-LUI D. POMPEIU.

4. NOTE MATEMATICE: 22, 23.

5. BIBLIOGRAFIE.

6. PROBLEME REZOLVATE: 1027, 1085, 1631, 1776, 1609, 1777, 1793, 1817, 1904, 1916, 1918.

7. PROBLEME PROPUSE: 2090-2097.

8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice Tipografia Romanească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebu să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile d drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judeca matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoa educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastr Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe cal care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiuni problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lu Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politeh nică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Tim şoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare

ANUL XXII — NO. 10 TIMISOARA, DECEMVRIE 1942

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politechnică, Timișoara.

ECUAȚIA $AD-BC=1$ ÎN ÎNTREGI

DE

M. GHERMĂNESCU.

1. O Notă a D-lui *Bertrand Gambier*[1] îmi sugerează considerarea ecuației

$$(1)\qquad (A\,B\,C\,D)=AD-BC=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=1,$$

căreia îi voiu determina soluția generală în întregi. Dacă $B>A$, atunci și $D>C$. Putem face totdeauna să avem aceste neegalități, prin schimbarea liniilor și coloanelor.

Fie α_1 cel mai mare întreg pentru care avem

$$B=A\,\alpha_1+B_1,\qquad D=C\,\alpha_1+D_1;$$

avem $(A\,B\,C_1\,D_1)=1$, iar

$$(2)\qquad (A\,B\,C\,D)=(A\,B\,C_1\,D_1)(1\,0\,\alpha_1\,1),$$

produsul nefiind comutativ.

Nu putem avea simultan $B_1>A$, $D_1>C$, dată fiind proprietatea lui α_1; rezultă cel puțin o inegalitate contrarie, fie ea $B_1<A$, iar $(A\,B\,C_1\,D_1)=1$ arată că și $D_1<C$. Fie atunci β_1 cel mai mare întreg pentru care avem

$$A=B_1\beta_1+A_1,\qquad C=D_1\beta_1+C_1;$$

avem $(A_1\,B_1\,C_1\,D_1)=1$, iar

$$(A\,B\,C_1\,D_1)=(A_1\,B_1\,C_1\,D_1)(1\,\beta_1\,0\,1),$$

apoi

$$(3)\qquad (A\,B\,C\,D)=(A_1\,B_1\,C_1\,D_1)(1\,\beta_1\,0\,1)(1\,0\,\alpha_1\,1),$$

produsul nefiind comutativ.

Repetând procedeul, vom obține în general

$$(A\,B\,C\,D)=(A_n\,B_n\,C_n\,D_n)(1\,\beta_n\,0\,1)(1\,0\,\alpha_n\,1)(1\,\beta_{n-1}\,0\,1)$$
$$(1\,0\,\alpha_{n-1}\,1)\ldots(1\,\beta_1\,0\,1)(1\,0\,\alpha_1\,1),$$

unde $(A_n\,B_n\,C_n\,D_n)=1$, iar înmulțirea trebue efectuată *în ordinea în care este indicată*, adică primul factor cu al doilea, rezultatul cu al treilea, etc., altfel se obține o altă soluție a aceleiași ecuații.

Ori, numerele A, B, C, D fiind finite, procedeul precedent nu poate fi iterat decât de un număr finit de ori; cum A_i, B_i, C_i, D_i descresc, vom ajunge în mod necesar la o soluție finală $(A_n\,B_n\,C_n\,D_n)$ de forma $(1\,0\,a\,1)$ sau $(1\,b\,0\,1)$. Rezultă dar că vom avea una din egalitățile

$$(A\,B\,C\,D)=(1\,0\,a\,1)(1\,a_1\,0\,1)(1\,0\,b_1\,1\ldots$$
$$\ldots(1\,a_n\,0\,1)(1\,0\,b_n\,1),$$

sau

$$(B)\qquad (A\,B\,C\,D)=(1\,a\,0\,1)(1\,a_1\,0\,1)(1\,0\,b_1\,1)\ldots$$
$$(1\,a_n\,0\,1)(1\,0\,b_n\,1),$$

unde am efectuat o ușoară modificare de notație

De oarece

$$(1\,0\,a\,1)(1\,a_1\,0\,1)=(1\,0\,a+a_1\,1),$$

rezultă că prima egalitate de mai sus are forma

$$(A)\qquad (A\,B\,C\,D)=(1\,0\,a_1\,1)(1\,0\,b_1\,1)\ldots(1\,a_n\,0\,1)(1\,0\,b_n\,1)$$

astfel că (A) conține un număr *par*, iar (B) un număr *impar* de factori.

Am obținut astfel următorul rezultat general:

Ori ce soluție în întregi a ecuației nedeterminate

$$(A\,B\,C\,D)=AD-BC=1$$

se obține din unul din produsele

$$(A)\qquad (A\,B\,C\,D)=(1\,0\,a_1\,1)(1\,0\,b_1\,1)(1\,a_2\,0\,1)(1\,0\,b_2\,1\ldots$$
$$\ldots(1\,a_n\,0\,1)(1\,0\,b_n\,1),$$

$$(B)\qquad (A\,B\,C\,D)=(1\,a\,0\,1)(1\,a_1\,0\,1)(1\,0\,b_1\,1)\ldots$$
$$\ldots(1\,a_n\,0\,1)(1\,0\,b_n\,1),$$

unde a, a_i, b_i, sunt întregi arbitrari, al căror număr este finit.

[1] G. R. Paris 1917, t. 164, p. 165.

Exemple,

$$(7, 9, 10, 13) = (1011)(1021)(1301)(1011),$$

$$(7867) = (1101)(1601)(1011).$$

2. Ecuaţia (1) se întâlneşte în multe probleme de *Analiză nedeterminată*. Ca exemplu, voi considera ecuaţia nedeterminată

$$(2) \qquad xy = z(x+y)+1,$$

întâlnită de D-l Prof. *D. Pompeiu* în cercetările D-sale.

Să punem

$$x = z+u, \qquad y = z+v;$$

ecuaţia (2) devine

$$(3) \qquad uv = z^2+1,$$

astfel că la fiecare valoare arbitrară pentru z corespund atâtea perechi de valori pentru u şi v, respectiv pentru x şi y, în câte moduri se poate descompune z^2+1 într'un produs de doi factori de acelaş semn.

Să mergem însă mai departe. Orice divizor al lui z^2+1 este tot o sumă de două patrate *(Fermat*, apoi *Lagrange*), deci

$$\pm u = A^2+B^2, \qquad \pm v = C^2+D^2,$$

iar identităţile

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AD-BC)^2+(AC+BD)^2$$

$$= (AC-BD)^2+(AD+BC)^2$$

ne dau

$$z = AC+BD, \quad AD-BC = 1,$$

sau

$$z = AD+BC, \quad AC-BD = 1,$$

adică problema se reduce la rezolvarea în întregi a ecuaţiei (1).

ASUPRA ECUAŢIEI NEDETERMINATE

$$(1) \qquad xy = z(x+y)+1$$

DE

O. N. ŢINO.

Această ecuaţie a fost întâlnită de D-l Profesor *D. Pompeiu* în cercetările D-şale şi însoţită de o interpretare geometrică ne-a fost comunicată de D-l Prof. *N. Abramescu*.

Imi permit în cele ce urmează să dau aci soluţia şi generalizarea găsite de mine pentru ecuaţia (1).

1. În primul rând observăm că numerele întregi soluţii ale ecuaţii (1) trebue să fie prime între ele, *deci unul cel mult număr par*. Apoi pusă ecuaţia (1) sub forma

$$(2) \qquad (x+y-z)^2 = x^2+y^2+z^2+2$$

rezultă că o condiţie necesară pentru orice soluţie a ecuaţiei (1) este ca *suma patratelor celor trei numere mărită cu 2 să dea un patrat perfect*. În fine observăm că ecuaţia (1) este simetrică în raport cu x şi y, deci, dacă (a, b, c) este o soluţie întreagă a ecuaţiei, $(b, a, c$ este asemenea o soluţie întreagă a ecuaţiei.

2. Punând

$$(3) \qquad x+y = u,$$

avem din ecuaţia (1)

$$(4) \qquad xy = uz+1,$$

deci x, y sunt soluţiile ecuaţiei

$$(5) \qquad X^2-uX+uz+1 = 0.$$

Pentru ca ecuaţia (5) să aibă rădăcini întregi este necesar şi suficient ca

$$u^2-4uz-4 = m^2,$$

m întreg, sau încă punând:

$$(6) \qquad u-2z = n,$$

condiţia:

$$(7) \qquad m^2+4z^2+4 = n^2.$$

Dacă x, y sunt ambele impare, u este *par*, deci m şi n asemenea numere pare, z fiind par sau impar; dacă unul din numerele x, y este *par*, z este *impar*; m şi n ambele numere impare.

Soluţia întreagă cea mai generală a unei ecuaţii de forma

$$(8) \qquad u_1^2+u_2^2+u_3^2 = u_4^2$$

este dată de:

$$(9) \quad \begin{array}{l} u_1 = (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)D; \; u_2 = (\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)D; \\ u_2 = (2\alpha\beta-2\gamma\delta)D; \quad u_3 = (2\alpha\gamma+\beta\delta)D. \end{array}$$

a. Dacă aplicăm ecuaţiei nedeterminate (7), soluţia (9), avem:

$$(10)\quad \begin{matrix} n=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)D;\quad m=(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)D; \\ z=(\alpha\gamma+\beta\delta)D \end{matrix}$$

în care α, β, γ, δ fiind legate prin relația:

$$(11)\qquad D(\alpha\beta-\gamma\delta)=\pm 1,$$

rezultă necesar $D=+1$.

Așadar, *dacă luăm α, γ două numere prime între ele, pentru β și δ trebue să luăm termenii unei reduse a fracției $\frac{\alpha}{\gamma}$ desvoltată în fracție concontinuă.*

Deducem pentru x, y, z următoarea soluție întreagă:

$$(12)\quad \begin{matrix} x=\alpha^2+\delta^2+\alpha\gamma+\beta\delta;\quad y=\beta^2+\gamma^2+\alpha\gamma+\beta\delta: \\ z=\alpha\gamma+\beta\delta, \end{matrix}$$

unde α, β, γ, δ satisfac relației:

$$\alpha\beta-\gamma\delta=\pm 1.$$

b. Dacă pentru ecuația (7) luăm soluția:

$$n=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2;\qquad m=2(\alpha\gamma+\beta\delta);$$
$$2z=\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2$$

α, β, γ, δ fiind astfel $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2$ să fie număr par, iar $\alpha\beta-\gamma\delta=\pm 1$, găsim soluția întreagă:

$$(12')\quad \begin{matrix} x=\alpha^2+\delta^2+\alpha\gamma+\beta\delta;\quad y=\alpha^2+\delta^2-(\alpha\gamma+\beta\delta); \\ z=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2). \end{matrix}$$

Observare. Relația (7) pusă sub forma:

$$4(z^2+1)=(n-m)(n+m)$$

dă valoarea lui z, pentru care z^2+1 se descompune într'un produs de doi factori. Avem identitățile, pentru $\alpha\beta-\gamma\delta=\pm 1$, următoare:

$$(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+1=(\beta^2+\gamma^2)(\alpha^2+\delta^2)$$
$$[\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2]^2+4=$$
$$[(\alpha+\beta)^2+(\beta+\delta)^2]\,[\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2],$$

care pun în evidență valorile lui z.

3. Dacă considerăm ecuația mai generală:

$$(B)\qquad xy=z(x+y)+k,$$

unde k este un număr întreg dat, procedând în același fel ca în cazul tratat $k=1$, găsim soluția întreagă următoare:

$$(a)\quad \begin{matrix} x=2\alpha\beta+2k\gamma\delta+\alpha^2+4k\delta^2; \\ y=2\alpha\beta+2k\gamma\delta+4\beta^2+k\gamma^2; \\ x=2\alpha\beta+2k\gamma\delta \end{matrix}$$

între parametrii α, β, γ, δ având condiția:

$$(b)\qquad \alpha\gamma-4\beta\delta=\pm 1.$$

Observări. Din condiția (b) se deduce că α, γ sunt numere impare, apoi că $\alpha\gamma$ este prim cu $\beta\delta$; dacă luăm α și β arbitrar pentru γ și δ trebue să luăm termeni unei reduse a fracției $\frac{\alpha}{4\beta}$, desvoltată în fracție continuă. Rezultă apoi că x este totdeauna impar, iar y de aceeași paritate cu k.

II. Scriind relația, care rezultă din ecuația transformată, sub forma:

$$z^2+k=(4\beta^2+k\gamma^2)(\alpha^2+4k\delta^2),$$

avem o descompunere în produs de doi factori a formei (z^2+k) pentru

$$z=2\alpha\beta+2k\gamma\delta\quad\text{și}\quad\alpha\gamma-4\beta\delta=\pm 1.$$

III. O a doua soluție întreagă a ecuației (B) este dată de:

$$(c)\quad \begin{cases} x=\alpha^2+k\delta^2+\alpha\beta+k\gamma\delta; \\ y=\alpha^2+k\delta^2-\alpha\beta-k\gamma\delta; \\ z=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-k\gamma^2+k\delta^2), \end{cases}$$

unde $\alpha\gamma-\beta\delta=\pm 1$ și $\alpha^2-\beta^2-k\gamma^2+k\delta^2$ număr par.

Asemenea:

$$\begin{cases} x=\alpha\beta+k\gamma\delta+\alpha^2+k\delta^2; \\ y=\alpha\beta+k\gamma\delta+\beta^2+k\gamma^2; \\ z=\alpha\beta+\gamma\delta, \end{cases}$$

unde $\alpha\gamma-\beta\delta=\pm 1$.

Pentru valorile lui z, ca în cazul particular, avem o descompunere a lui z^2+k în un produs de doi factori.

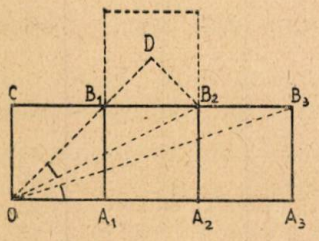
ASUPRA UNEI PROBLEME A D-LUI D. POMPEIU

DE

N. ABRAMESCU.

În cele ce urmează dau o soluție geometrică a problemei pe care mi-a comunicat-o D-l *D. Pompeiu*.

Se consideră trei patrate lipite $O A_1 B_1 C$, $A_1 A_2 B_2 B_1$, $A_2 A_3 B_3 B_2$ *și se cere să se arate cu mijloace elementare că unghiurile* $B_1 O B_2$ și $B_3 O A_3$ *sunt egale.*



Iată cum îmi scrie D-l *Pompeiu* că a fost condus la această problemă

„Într'o chestie de Aritmetică superioară se introduce ecuația diofantică

$$(1) \qquad X Y = Z(X + Y) + 1$$

care trebue satisfăcută cu numere întregi și pozitive Dar

$$\frac{X Y - 1}{X + Y}$$

are asemănare cu formula de adunare a cotangentei, iar ecuația (1) are, între alte soluții, și sistemul

$$X = 2, \quad Y = 3, \quad Z = 1.$$

Înterpretarea acestei soluții este problema geometrică de mai sus".

Soluția geometrică ce am dat este următoarea. Construim patratul egal cu $A_1 A_2 B_2 B_1$ așezat deasupra, cu centrul D. Se vede că

$$D O = 3 D B_1, \quad D O = 3 D B_2, \quad O A_3 = 3 A_3 B_3.$$

Deci triunghiurile dreptunghice $D O B_2$ și $A_3 O B_3$, având

$$\frac{O D}{D B_2} = \frac{O A_3}{A_3 B_3},$$

sunt asemenea, au deci unghiurile respectiv egale, și astfel

$$\sphericalangle B_1 O B_2 = \sphericalangle B_3 O A_3.$$

NOTE MATEMATICE

22. — *Soluția generală a ecuației diofantice,*

$$(1) \qquad x y = a z(x + y) + b, \qquad (a,\ b \text{ întregi}).$$

Facem în (1) substituția

$$y = \lambda + a z$$

și avem

$$x(\lambda + a z) = a z(x + \lambda + a z) + b.$$

Deducem astfel pentru ecuația (1) soluția generală,

$$(1') \qquad \begin{cases} x = a z + \dfrac{b + a^2 z^2}{\lambda} \\ y = \lambda + a z \end{cases}$$

unde z este un întreg după voie, iar λ este un divizor oarecare al numărului $b + a^2 z^2$, inclusiv 1, sau $b + a^2 y^2$.

Ecuația (1) fiind simetrică în x, y, aceste necunoscute se pot schimba între ele în (1').

Caz particular. Pentru $a = b = 1$, ecuația (1) și soluția sa generală (1'), devin

$$(2) \qquad x y = z(x + y) + 1$$

$$(2') \qquad \begin{cases} x = z + \dfrac{1 + z^2}{\lambda} \\ y = \lambda + z, \end{cases}$$

unde z este un întreg după voie, iar λ un divizor oarecare a lui $1 + z^2$, inclusiv 1, sau $1 + z^2$. Necunoscutele x, y se pot schimba între ele, cum am observat mai sus.

Observare. Ecuația (2) a fost întâlnită de D-l Prof. *Pompeiu* în cercetările D-sale.

V. ALACI

---

23. — *O nouă demonstrație a teoremei lui Stewart.*

Notele matematice, cât și articolul D-lui Profesor *V. Alaci*, mi-au inspirat posibilitatea de a demonstra sus numita teoremă, utilizând „noțiunea de *latură-vector* asociată cu aceea de număr complex corespunzător".

Un fel de a exprima teorema lui *Stewart* este:

Dacă M *este un punct oarecare interior pe baza* B C *a unui triunghiu* A B C, *avem relațiunea:*

$$\overline{AB}^2 . \overline{MC} + \overline{AC}^2 . \overline{MB} - \overline{AM}^2 . \overline{BC} = \overline{MB} . \overline{MC} . \overline{BC}$$

Fie triunghiul A B C (fig. 1) cu laturile orientate şi y, z, numere complexe corespunzătoare lui A M, C şi M B. Evident, *laturile-vectori* A B, A C şi C sunt reprezentate prin numerele complexe $-z$, $x+y$ şi $y+z$.

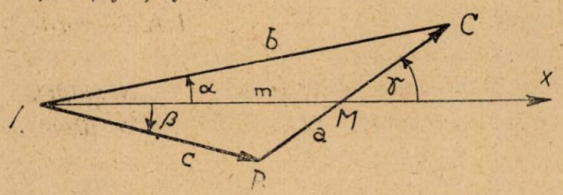


Fig. 1.

Considerăm identitatea

(1) $\quad y(x-z)^2+z(x+y)^2-x^2(y+z)\equiv yz(y+z)$

are se traduce astfel:

Dacă M este un punct oarecare interior pe *latura-vector* (baza) B C a unui triunghiu A B C cu laturile orientate, între segmentele şi *laturile-vectori*, avem relaţiunea:

$$\overline{BM}^2.\overline{MC}+\overline{AC}^2.\overline{MB}-\overline{AM}^2.\overline{BC}=\overline{MB}.\overline{MC}.\overline{BC}$$

Alegând pe A M X ca axă, exprimăm laturile şi *segmentele-vectori* în funcţie de *modul* şi *argument*, având:

$$\sphericalangle CAM=\alpha,\quad \sphericalangle MAB=\beta,\quad \sphericalangle CMX=\gamma.$$

Astfel, avem relaţiile:

$$x=|x|,\quad y=|y|e^{i\gamma},\quad z=|z|e^{i\gamma},$$

(2) $\quad x-z=|x-z|e^{-i\beta},\quad x+y=|x+y|e^{i\alpha},$

$$y+z=|y+z|e^{i\gamma},\qquad (i=\sqrt{-1}).$$

În baza relaţiilor (2), identitatea (1) devine

(3) $\quad |y||x-z|^2e^{i(\gamma-2\beta)}+|z||x+y|^2e^{i(\gamma+2\alpha)}-$

$$|x|^2|y+z|e^{i\gamma}=|y||z||y+z|e^{i3\gamma},$$

sau simplificând cu $e^{i\gamma}$

(4) $\quad |y||x-z|^2e^{-i2\beta}+|z||x+y|^2e^{i2\alpha}-$

$$|x|^2|y+z|=|y||z||y+z|e^{i2\gamma}.$$

Astfel, pornind dela identitatea (1), am urmat metoda dată de D-l Prof. *Alaci* pentru stabilirea relaţiilor metrice clasice într'un triungiu, în speranţa că voiu găsi relaţia cautată (a lui *Stewart*).

Într'adevăr, egalând în relaţia (4) părţile reale, obţinem

(5) $\quad |y||x-z|^2\cos 2\beta+|z||x+y|^2\cos 2\alpha-$

$$|x|^2|y+z|=|y||z||y+z|\cos 2\gamma,$$

care poate fi pusă sub forma

(6) $\quad |y||x-z|^2(1-2\sin^2\beta)+|z||x+y|^2(1-2\sin^2\alpha)$

$$-|x|^2|y+z|=|y||z||y+z|(1-2\sin^2\gamma).$$

Din triunghiul A B C, obţinem relaţiile

(7) $\quad \sin\alpha=\dfrac{|y|\sin\gamma}{|x+y|},\qquad \sin\beta=\dfrac{|z|\sin\gamma}{|x-z|},$

pe care înlocuindule în relaţia (6), pusă sub forma

(6′) $\quad |y||x-z|^2+|z||x+z|^2-|x|^2|y+z|-|y||z||y+z|$

$$=2|y||x-z|^2\sin^2\beta+2|z||x+y|^2\sin^2\alpha$$

$$-2|y||z||y+z|\sin^2\gamma$$

obţinem, observând că partea doua a egalităţii 6′) este nulă:

$$\boxed{|y||x-z|^2+|z||x+y|^2-|x|^2|y+z|=|y||z||y+z|},$$

(8)

care cuprinde tocmai enunţul teoremei lui *Stewart*.

Consecinţă. Dacă în relaţia (4) egalăm părţile imaginare, obţinem

(9) $\quad |z||x+y|^2\sin 2\alpha-|y||x-z|^2\sin 2\beta=$

$$|y||z||y+z|\sin 2\gamma$$

relaţie, în care, dacă eliminăm pe $\sin 2m$ ($m=\alpha,\beta,\gamma$), găsim o nouă relaţie între laturile unui triunghiu, asemănătoare cu aceea a lui *Stewart*.

Pentru aceasta punem, $\sin 2m=2\sin m\cos m$, ($m=\alpha,\ \beta,\ \gamma$). Relaţia (9) devine

(10) $\quad 2|z||x+y|^2\sin\alpha\cos\alpha-2|y||x-z|^2\sin\beta\cos\beta$

$$=2|y||z||y+z|\sin\gamma\cos\gamma.$$

În virtutea relaţiilor (7) şi a relaţiilor

$$\cos\alpha=\frac{|x|^2+|x+y|^2-|y|^2}{2|x||x+y|},$$

(11) $\quad \cos\beta=\dfrac{|x|^2+|x-z|^2-|z|^2}{2|x||x-z|},$

$$\cos\gamma=\frac{|x|^2+|z|^2-|x-z|^2}{2|x||z|},$$

ce există în triunghiul A B C, relaţia (10) devine identitatea

(12) $\quad |z|[|x|^2+|x+y|^2-|y|^2]-|z|[|x|^2+|x-z|^2-|z|^2]$

$$=|y+z|[|x|^2+|z|^2-|x-z|^2]$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$(13)\quad \left|\begin{array}{c} |z|\left[|x+y|^2-|x-z|^2\right]-|z|\left[|y|^2-|z|^2\right]= \\ |y+z|\left[|x|^2+|z|^2-|x-z|^2\right] \end{array}\right| .$$

Această relaţie se traduce geometriceşte prin următorul enunţ:

Dacă M *este un punct oarecare interior pe baza* BC *a unui triunghiu* ABC, *avem rclaţia*

$$(14)\quad \overline{MB}\left[\overline{AC}^2-\overline{AB}^2\right]-\overline{MB}\left[\overline{MC}^2-\overline{MB}^2\right]= \overline{BC}\left[\overline{AM}^2+\overline{MB}^2-\overline{AB}^2\right].$$

La fel există şi relaţia simultană

$$(15)\quad \overline{MC}\left[\overline{AB}^2-\overline{AC}^2\right]-\overline{MC}\left[\overline{MB}^2-\overline{MC}^2\right]= \overline{BC}\left[\overline{AM}^2+\overline{MC}^2-\overline{AC}^2\right].$$

SIPOS I. EUGEN

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, No. 3, Noemvrie 1942. *Galileo Galilei*, de *Gabriela Ţiţeica*. Generalizarea unor identităţi ale lui *Euler* şi a D-lui Prof. *A. G. Ioachimescu*, de *N. V. Ghicoiaşiu*. O problemă de geometrie descriptivă, de *Alexandru I. Guţu*. Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „*Vasile Conta*“, de *O. Onicescu*, *Al. Pantazi* şi *P. Sergescu*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. † *Gheorghe Bratu*. Cinci conferinţe de Astronomie. (Monografii Matematice, Fascicula VIII, Seminarul de Matematici al Universităţii din Cluj).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1027. — *Fie* A_1 *punctul diametral opus vârfului* A *al triunghiului* ABC *în cercul circumscris, iar* A′ *punctul în care* AA_1 *taie pe* BC. *Perpendiculara în* A′ *pe* AA′ *taie laturile* AB, AC *în* M, N. *Punctele* A, M, A_1, N *sunt pe un cerc care are centrul pe înălţimea care pleacă din* A *în triunghiul* ABC.

C. COSNITA

Soluţia acestei probleme s-a publicat, împreună cu o generalizare, în nota No. 9 de la pag. 102, Vol. XII al revistei noastre.

S-au primit soluţii foarte bune, independente de acea notă. de la d-nii: *Boeriu V.*, *Dăscălescu H.*, *Ionescu-Bujor C*, *Ivănescu C.*, *Mecu M.*, *Mehedinţi D.*, *Mihăileanu N. N*, *Pop I. L.*, *Popa N. I.*, *Predoiu Fl*, *Săndulescu I. I.*, *Ştefănescu Anibal*, *Süli M.* şi *Tica P. M.*

G-l Gh. B.

Problema 1085. — *În paralelogramul* ABCD *se proiectează unul din vârfurile sale* B *pe diagonala* AC *în* P *şi pe laturile* DA *şi* DC *în* M *şi* N.

1°. *Să se găsească expresia ariei triunghiului* PMN *în funcţie de* BP *şi de unghiul* A *al paralelogramului.*

2°. *Între ce limite poate varia unghiul* A *pentru ca unghiul* P *al triunghiului* PMN *să fie drept. La ce se reduce expresia ariei precedente în cazul acesta.*

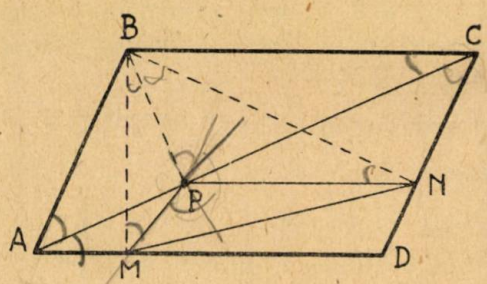
AUGUST COMAN

1. *Unghiul* $A<\frac{\pi}{2}$. Patrulaterele inscriptibile AMPB şi BPNC au unghiurile $MAP=MBP$, $BAP=BMP$ şi $BCP=BNP$, $NCP=NBP$. Unghiul MPN fiind exterior triunghiurilor MBP şi NBP, urmează

$$MPN=(BMP+MBP)+(PBN+PNB),$$

$$MPN=(BAP+PAM)+(NCP+PCB)=A+C,$$

$$MPN=2A.$$



Triunghiurile MPB şi BPN au unghiurile $BMP=BAP=PCN=PBN$, $MBP=PAM=PCB=PNB$, sunt asemenea, deci

$$\frac{PB}{PN}=\frac{MP}{PB},\quad \overline{PB}^2=MP.PN.$$

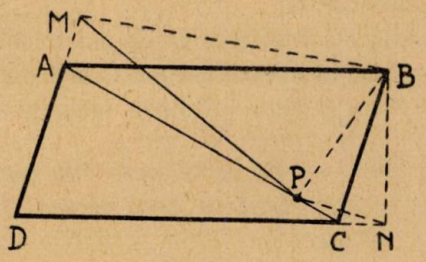
Aria triunghiului MPN este

$$S=\frac{1}{2}MP.PN\sin MPN=\frac{1}{2}\overline{PB}^2\sin 2A.$$

Când unghiul $P=\frac{\pi}{2}$, atunci $P=2A=\frac{\pi}{2}$, $A=\frac{\pi}{4}$ şi aria este $\frac{1}{2}\overline{BP}^2$.

2. *Unghiul* $A>\frac{\pi}{2}$. Se vede în mod analog că $P=2(\pi-A)$ şi aria este

$$S = \frac{1}{2}\overline{BP}^2 \sin 2(\pi - A) = \frac{1}{2}\overline{BP}^2 \sin 2A.$$



Ca să avem $P = \frac{\pi}{2}$, trebue $2(\pi - A) = \frac{\pi}{2}$, $A = \frac{3\pi}{4}$. În acest caz, aria este

$$S = \frac{1}{2}\overline{BP}^2.$$

Unghiul P poate fi $\frac{\pi}{2}$, când unghiul A este $\frac{\pi}{4}$, sau $\frac{3\pi}{4}$ și aria este $\frac{1}{2}\overline{BP}^2$.

Au rezolvat problema d-nii: *Ghiocel Vasile, Ivănescu Cezar, Lățea Constantin, Lupescu Gh. C., Negrea Mircea, Popa Nicolae, Săndulescu Ion, Süli Mihai, Tica Marin.*

N. A.

Problema 1609 [1] — *Să se rezolve ecuația*

$$8.16^{\cos^2 x - 1} + 5(4^{\sin^2 x} - 2^{\cos 2x}) - 16^{\sin^2 x} = 2.$$

DUMITRU MATEI.

Soluție. Ecuația dată se mai poate scri succesiv

$$2 \cdot 4^{2\cos^2 x - 1} + 10 \cdot 2^{2\sin^2 x - 1} - 5.2^{\cos 2x} - 4.4^{2\sin^2 x - 1} =$$

$$2 \cdot 4^{\cos 2x} + 10.2^{-\cos 2x} - 5.2^{\cos 2x} - 4.4^{-\cos 2x} = 2,$$

sau

$$(1)\quad 2.2^{2\cos 2x} + 10.2^{-\cos 2x} - 5.2^{\cos 2x} - 4.2^{-2\cos 2x} = 2$$

Notând

$$(2)\qquad 2^{\cos 2x} = y,$$

ecuația (1) devine

$$2y^2 + \frac{10}{y} - 5y - \frac{4}{y^2} = 2,$$

de unde rezultă

$$(3)\qquad 2y^4 - 5y^3 - 2y^2 + 10y - 4 = 0.$$

Această ecuație, descompusă în factori, devine

$$(y^2 - 2)(2y^2 - 5y + 2) = 0$$

și prin urmare deducem de aci

$$y = \pm\sqrt{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad y = 2,$$

Cum din relația de substituție (2), se vede că

$$\frac{1}{2} \leq y \leq 2,$$

putem lua

$$2^{\cos 2x} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \quad 2^{\cos 2x} = 2^{-1}, \quad 2^{\cos 2x} = 2.$$

De aci deducem respectiv

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad x = k\pi,$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

D-l *Lepolszky C,* a ajuns la ecuația (3), unde s-a oprit.

Problema 1631. — *Să se stabilească identitatea*

$$2^4 \sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15} = 1.$$

V. ALACI

Prima soluție. Notând E primul membru, putem scri succesiv,

$$E = 4\left(-2\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\right)\left(-2\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{3}\right).$$

Dar avem cunoscut

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4},$$

astfel că expresia lui E devine

$$E = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$4\,\frac{1-\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = 4 \cdot \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{16} = 1.$$

Astfel am stabilit identitatea cerută.

Soluții date de d-ra *Papadopol D Elena* (Lic. Bacău) și de d-nii: *Aldea V Minea* (lic. Buzău), *Andrievici N.* (Lic. Milit, N. Filipescu), *Cernat Camil* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Dăscălescu St. Hristache* (Focșani), *Diaconescu*

[1]) Enunț rectificat.

Marcel (Lic Milit., N. Filipescu). *Jidanu C. I.* (Lic. Beiuş), *Lepolszky Carol*, *Reischer L. H.* (Lic. Internat, Iaşi), *Solomon I* (Lic. Internat, Iaşi), *Stoenescu D. Mirel* (Lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tilică C. Ştefan* (T.-Severin).

Soluţia 2-a. În „*R. M. T.*", Anul VII, p. 140, în articolul „*Sume trigonometrice transformate în produse*", am stabilit următoarea identitate:

$$\cos n\,t = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos t - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right].$$

Dacă aci luăm

$$n = 5, \qquad t = \frac{\pi}{30},$$

avem,

$$\cos\frac{\pi}{6} = 2^4\sum_{k=0}^{4}\left[\cos\frac{\pi}{30} - \cos\frac{(2k+1)\pi}{10}\right] =$$

$$2^9\prod_{k=0}^{4}\sin\frac{(3k+1)\pi}{30}\sin\frac{(3k+2)\pi}{30},$$

sau

$$\frac{\sqrt{3}}{2^{10}} = \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{30}\sin\frac{7\pi}{30}\sin\frac{10\pi}{30}\sin\frac{13\pi}{30}\times$$

$$\sin\frac{2\pi}{30}\sin\frac{5\pi}{30}\sin\frac{8\pi}{30}\sin\frac{11\pi}{30}\sin\frac{14\pi}{30}.$$

Cum în membrul al 2-lea, arcele din factorii extremi şi acei echidistanţi de extremi sunt complimentare, înlocuim sinusurile ultimilor cinci arce prin cosinusii arcelor complimentare şi putem scri

$$\sqrt{3} = 2^5\left(2\sin\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{30}\right)\left(2\sin\frac{4\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{30}\right)\times$$

$$\left(2\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\right)\left(2\sin\frac{10\pi}{30}\cos\frac{10\pi}{30}\right)\times$$

$$\left(2\sin\frac{13\pi}{30}\cos\frac{13\pi}{30}\right),$$

sau

$$(1)\qquad \frac{\sqrt{3}}{2} = 2^4\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15}\sin\frac{10\pi}{15}\sin\frac{13\pi}{15}.$$

Cum,

$$\sin\frac{13\pi}{15} = \sin\frac{2\pi}{15},$$

$$\sin\frac{10\pi}{15} = \sin\frac{5\pi}{15} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

rezultă că relaţia (1) simplificată prin $\frac{\sqrt{3}}{2}$, devine

$$2^4\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{7\pi}{15} = 1,$$

tocmai identitatea cerută.

De altfel aceasta a fost metoda ce am folosit-o pentru a ajunge la identitatea propusă, metodă ce permite construirea şi altor identităţi analoage.

Problema 1776. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, ştiind că dacă punem cifra 1 înaintea lui, obţinem un patrat perfect de cinci cifre.*

C-TIN I. JIDANU

Soluţie. N^2 fiind patratul cerut, conform enunţului trebuie să avem

$$N^2 + 10000 = M^2,$$

sau

$$N^2 + 100^2 = M^2.$$

Se ştie că soluţiile întregi al acestei ecuaţii, sunt de forma

$$(1)\quad N = m^2 - n^2, \quad 100 = 2mn, \quad M = m^2 + n^2.$$

Dar a 2-a din aceste relaţii se mai poate scri

$$(2)\qquad mn = 2\times 5^2.$$

Cum din (1) rezultă $m > n$, relaţia (2) este satisfăcută dacă luăm

$$m = 50, \qquad n = 1,$$
$$m = 25, \qquad n = 2,$$
$$m = 10, \qquad n = 5.$$

Inlocuind în (1) avem respectiv

$$N = 2499, \qquad N = 621, \qquad N = 75.$$

Ridicând aceste numere la patrat, observăm că numai patratul lui 75 este de patru cifre, fiindcă

$$75^2 = 5625.$$

Singura soluţie a problemei este astfel patratul 5625.

Soluţii bune, dar prin alte metode, date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Cetăţeanu Stelian* (Polit., Bucureşti), *Cristea I. Ionel* (Blaj), *Deheleanu I. Gheorghe* (Lic., Beiuş), *Logofătu Ion* (lic Beiuş), *Lupescu Corneliu* (S-lt, Roman), *Popescu N. Corneliu* şi *Tilică C. Ştefan.*

Observare. Unele soluţii au fost motivate în felul următor: Căutând într'o tabelă de patrate perfecte găsim că singura soluţie este 5625. Astfel de soluţii n-au putut fi luate în consideraţie.

Problemei 1777. — *Să se găsească patratele perfecte de forma* $\overline{aaabc}$, *unde* $a = 2c$.

N. ANITESCU

Soluție. Cifra c, terminație de patrat perfect, ate fi 0, 1, 4, 5, 6, 9, dar din cauza relației n enunț c poate fi numai 1, sau 4

Rezultă de aci, că patratele cerute sunt de forma

$$222b1, \qquad 888b4$$

i extragem rădăcina patrată a acestor numere em

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2.2\,2.b\,1} & 149 \\ \hline 1\,2.2 & 24\times 4=96 \\ \quad 9\,6 & \\ \hline \quad 2\,6\,b.1 & 489\times 9=2601, \\ \quad 2\,6\,0\,1 & \\ \hline \qquad b\,0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{8.8\,8.b\,4} & 298 \\ \hline 4\,8.8 & 49\times 9=441 \\ \quad 4\,4\,1 & \\ \hline \quad 4\,7\,b\,4 & 588\times 8=4704. \\ \quad 4\,7\,0\,4 & \\ \hline \qquad b\,0 & \end{array}$$

Pentru ca rădăcina să fie exactă, trebuie să luăm ambele cazuri $b=0$.

Patratele cerute sunt astfel

$$22201=149^2, \qquad 88804=298^2.$$

Soluții date de d-nii: *Cetățeanu Stelian* (Polit., Bucureşti), *Cristea D. Viorel* (Lic. Arad), *Deheleanu Gheorghe* (Polit., Timişoara), *Enăchescu Ion* (Lic. Milit, Timişoara), *Iacso I Gheorghe* (Lic. Loga, Timişoara), *Moldovan Teodor* (Lic. Loga, Timişoara), *Popescu Adrian* (Polit, Timişoara), *Vasiliu D-tru* (Lic. Milit, Timişoara) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1793. — *Să se arate că pentru* $\geq 0{,}50$, *avem*

$$\sqrt{x+\sqrt{x-0{,}25}}-\sqrt{x-\sqrt{x-0{,}25}}=1$$

i pentru $0{,}25\leq x\leq 0{,}50$, *avem*

$$\sqrt{x+\sqrt{x-0{,}25}}+\sqrt{x-\sqrt{x-0{,}25}}=1.$$

LT. C. IONESCU-TIU

Soluție. Să notăm cu E şi F primii membrii le celor două relații

Fiindcă $x>0{,}50$, rezultă că $x-0{,}25>0$ şi vem

$$E^2=2x-2\sqrt{x^2-x+0{,}25}=2x-2\sqrt{(x-0{,}5)^2}=$$

$$2x-2(x-0{,}5)=1,$$

indcă $x\geq 0{,}5$, prin urmare, $E=1$.

De asemeni, având $x>0{,}25$, rezultă $x-0{,}25>0$ şi avem

$$F^2=2x+2\sqrt{x^2-x+0{,}25}=2x+2\sqrt{(0{,}5-x)^2}$$

$$=2x+2(0{,}5-x),$$

fiindcă $x\leq 0{,}50$, prin urmare

$$F^2=1, \quad \text{deci} \quad F=1.$$

Am luat pentru E şi F valorile ce convin.

Soluții date de d-nii: *Aldea V. Mircea* (Buzău), *Cârlan Nicolae* (Tecuci), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timişoara), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Țarălungă Savel* (Lic. Internat, Iaşi) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1817. — *Să se găsească un număr de forma* $a\,a\,b\,b$ *din care scăzând 2 să obținem un patrat perfect.*

I. I. STAMATE

Soluție. Din şirul de terminații de două cifre ale unui patrat perfect, astfel ca cifra din stânga să fie cu două unități mai mare ca cealaltă, găsim că numai 64 satisface această condiție, deci $b=6$.

Numărul cerut este astfel de forma

$$a\,a\,66.$$

Conform enunțului trebuie încă, ca

$$a\,a\,64$$

să fie patrat perfect.

Nu putem lua $a=1$, sau $a=7$, fiindcă numerile 1164 şi 7764 sunt divizibile prin 3 fără a fi şi cu 9, deci nu sunt patrate perfecte. Dacă luăm pentru a alte cifre, obținem respectiv numerile 2264, 3364, 4464, 5564, 6664, 8864 9964.

Extrăgând rădăcina patrată a acestor numere, găsim că numai 3364 este patrat perfect, $3364=58^2$.

Soluții date de d-nii: *Aldea A. Mircea* (Buzău), *Enăchescu I.* (Lic. Milit., Timişoara), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Popescu Adrian* (Polit., Timişoara), *Schapira Salo* (Piatră-Neamț) şi *Vasiliu Gh. D-tru* (Lic. Milit., Timisoara).

Observare. Mai multe soluții, n au fost suficient motivate, astfel că nu sunt menționate.

Problema 1904. — *Dacă* x *este un arc din primul cadran, să se arate că avem,*

$$Sp\,x=\sqrt{(Sp\,x-1)(2+sp\,x\,Sp\,x+cp\,x\,Cp\,x)},$$

notațiile fiind cele din „Trigonometria patratică".

NICOLAE I. CRISTEA

Soluția. Din „*Trigonometria patratică*“ se cunosc formulele

$$Sp\,x = \frac{1}{cp\,x}, \qquad Cp\,x = \frac{1}{sp\,x},$$

astfel că expresiunea de sub semnul radical, notată cu R, devine succesiv

$$R = (Sp\,x - 1)(2 + sp\,Sp\,x + cp\,x\,Cp\,x) =$$

$$\left(\frac{1}{cp\,x} - 1\right)\left(2 + \frac{sp\,x}{cp\,x} + \frac{cp\,x}{sp\,x}\right) =$$

$$\frac{1 - cp\,x}{cp\,x} \cdot \frac{(sp\,x + cp\,x)^2}{sp\,x\,cp\,x}.$$

Cum pentru arcele din primul cadran avem

$$sp + cp\,x = 1,$$

rezultă

$$R = \frac{sp\,x}{sp\,x\,cp^2\,x} = \frac{1}{cp^2\,x}.$$

Avem astfel,

$$\sqrt{(Sp\,x - 1)(2 + sp\,x\,Sp\,x + cp\,x\,Cp\,x)} = \frac{1}{cp\,x} = Sp\,x,$$

tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Bakonyi* C. (Polit., Timișoara), *Enăchescu I.* (Lic. Milit., Timișoara), *A. Gloden* (Luxemburg), *Ionescu F. Petre* (Colegiul „Carol“, Craiova, *Luca I. Ioan* (Polit., Timișoara), *Lupescu Corneliu* (S-lt. Roman), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timișoara), *Săruleșteanu Emanuel* (București), *Vasiliu D-tru* (Lic. Milit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 1916. — *Presupunând $a \neq b$ să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} a\,x + y + z = b \\ x + a\,y + z = a \\ x + y + a\,z = 1 \end{cases}$$

CORNELIA NANES

Soluție. Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a+2)(a-1)^2.$$

Acum distingem următoarele cazuri:

Cazul, $a \neq -2$ și $\neq 1$. În acest caz, *sistemul este compatibil și determinat,* iar regula lui *Cramer* ne dă

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{(a+2)(a-1)} = \dfrac{(b-1)(a+1)}{(a+2)(a-1)}, \\ y = \dfrac{\Delta_2}{(a+2)(a-1)} = \dfrac{a^2-a-b-1}{(a+2)(a-1)}, \\ z = \dfrac{\Delta_3}{(a+2)(a-1)} = \dfrac{1-b}{(a+2)(a-1)}, \end{cases}$$

fiindcă,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (b-1)(a^2-1)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & b & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1-a & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a^2-a-b-1)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b-1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (b-1)(1-a).$$

Cazul, $a = 2$. În acest caz $\Delta = 0$ și sistemul dat devine

$$(2) \qquad \begin{cases} -2\,x + y + z = b \\ x - 2\,y + z = -2 \\ x + y - 2\,z = 1. \end{cases}$$

Un determinant minor al lui Δ diferit de zero, este în acest caz

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3,$$

referitor la x, y din primele două ecuații.

Determinantul caracteristic corespunzător, este atunci

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & b \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(b-1).$$

Pentru ca sistemul dat să fie *compatibil,* trebuie ca acest determinant să fie nul, deci

$$b = 1,$$

în care caz sistemul (2), admite sistemul de soluții

$$\begin{cases} x = z \\ y = z + 1. \end{cases}$$

Dacă însă $b \neq 1$, sistemul (2) este incompatibil.

Cazul $a = 1$. În acest caz, avem tot $\Delta = 0$ şi sistemul dat devine

$$\begin{cases} x+y+z=b \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1. \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil, numai dacă $b=1$, dar acest caz conform enunţului se exclude, căci am avea $a=b$. Deci pentru $a=1$, sistemul dat este incompatibil, având $b \neq 1$.

Soluţii bune date de d-ra *Mang Ileana* (studentă, Timişoara) şi de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timişoara), *Boleanţu Lazăr* (Polit., Timişoara), *Dobrescu V. Eugen* (Lic. Piatra-Neamţ), *Goga Florian* (Timişoara), *Iosifescu Cicerone*, *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Manolache C. Mircea* (Lic. Internat, Iaşi), *Vicol I. Aurel* (Lic. Piatra-Neamţ) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1918. — *Să se rezolve sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} + 3\dfrac{\cos 2y - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 2y} = 2 \\ 2\dfrac{\cos x - \cos y}{\sin x + \sin y} - \dfrac{\cos 2y + \cos 2x}{\sin 2x + \sin 2y} = 9. \end{cases}$$

MIHAIL BOTEZ

Soluţie Putem scri,

$$\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}}{2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x-y}{2},$$

$$\frac{\cos 2y - \cos 2x}{\sin 2x - \sin 2y} = \frac{2\sin(x+y)\sin(x-y)}{2\sin(x-y)\cos(x+y)} = \operatorname{tg}(x+y),$$

$$\frac{\cos x - \cos y}{\sin x + \sin y} = -\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{x-y}{2},$$

$$\frac{\cos 2y + \cos 2x}{\sin 2x + \sin 2y} = \frac{2\cos(x+y)\cos(x-y)}{2\sin(x+y)\cos(x-y)} = \operatorname{cotg}(x+y),$$

astfel că sistemul dat devine

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2} + 3\operatorname{tg}(x+y) = 2 \\ -2\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2} - \operatorname{cotg}(x+y) = 9. \end{cases}$$

Notând,

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = u, \qquad \operatorname{tg}(x+y) = v,$$

sistemul (1) se poate scri

$$\begin{cases} u + 3v = 2 \\ -2u - \dfrac{1}{v} = 9. \end{cases}$$

Eliminând pe u, obţinem

$$6v^2 - 13v - 1 = 0.$$

Deducem astfel

$$\begin{cases} v = \dfrac{13 \pm \sqrt{193}}{12} = \dfrac{13 \pm 13{,}8924}{12} = 2{,}241, \text{sau } 0{,}0743 \\ u = \dfrac{-5 \mp \sqrt{193}}{4} = \dfrac{-5 \mp \sqrt{193}}{4} = -4{,}7231, \text{sau} 2{,}2331 \end{cases}$$

Ţinând seamă de notaţiile (1), rezultă

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2} = -4{,}7231 \\ \operatorname{tg}(x+y) = 2{,}24', \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2} = 2{,}2331 \\ \operatorname{tg}(x+y) = 0{,}0743. \end{cases}$$

Luând logaritmii, avem:

$$\begin{cases} \lg\operatorname{tg}\dfrac{y-x}{2} = 0{,}67422 \\ \lg\operatorname{tg}(x+y) = 0{,}35004, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \lg\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2} = 0{,}34889 \\ \lg\operatorname{tg}(x+y) = \bar{2}{,}87099. \end{cases}$$

Trecând la arce, găsim

$$\begin{cases} \dfrac{y-x}{2} = k\pi + 78^\circ,\ 2'\ 43'' \\ x+y = k_1\pi + 65^\circ,\ 57'\ 3'', \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = k_2\pi + 65^\circ,\ 52'\ 3'' \\ x+y = k_3\pi + 4^\circ,\ 14',\ 57''. \end{cases}$$

De aici deducem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(k_1 - 2k)\pi}{2} - 45^0,\ 8',\ 11'' \\ y = \dfrac{(k_1 + 2k)\pi}{2} + 111^0,\ 1',\ 14'', \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = \dfrac{(k_3 + 2k_2)\pi}{2} + 67^0,\ 59',\ 41'' \\ y = \dfrac{(k_3 - 2k_2)\pi}{2} - 63^0,\ 45',\ 34'', \end{cases}$$

unde k, k_1, k_2, k_3 sunt întregi oarecare, sau pot fi zero.

Soluții date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit, Timișoara), *Goga Florian* (student, Timișoara) și *Wegener Eugen* (Bucuresti).

PROBLEME PROPUSE

2090. — Să se găsească patratul de opt cifre $abcdefgh$ a cărui rădăcină patrată diferă cu 1 de $defg$, sau $cdef$.

G-L GH. BUICLIU

2091 — Să se rezolve în întregi ecuația

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + 1.$$

M. GHERMANESCU

2092. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)(z+1) = 24 \\ (x^3+1)(y^3+1)(z^3+1) = 504 \\ xyz(2 - xyz) + \Sigma x^2 y = 24 \end{cases}$$

ADRIAN I. POPESCU

2093. — Să se afle maximul suprafeței triunghiului înscris într'un cerc de rază R, știind că diferența a două unghiuri este 30°.

A. CALINESCU

2094. — Se dă un cerc (C), doi diametrii AB, CD perpendiculari și un punct M pe cerc. Fie P intersecția lui MB cu bisectoarea interioară a unghiului DOM. Se cere locul lui P, când M variază pe cerc.

MATEI WEBER

2095. — Se dă o iperbolă echilateră, cu focarele F_1 și F_2, centrul O și M un punct pe aceasta iperbolă. Fie a semiaxa și 2α unghiul ce-l fac cele două raze vectoare ale punctului M. Să se stabilească relațiile

$$\overline{MO}^2 = \overline{MF_1} \cdot \overline{MF_2}$$

$$\overline{OM} = a \operatorname{cosec} \alpha.$$

ION RIZESCU

2096. — Pe un sfert de cerc AB cu centru O, se ia un punct oarecare C, care se proiectează ortogonal în D pe raza OA.

Pe prelungirea lui OA se ia segmentul AE = CD.

1° Să se demonstreze că triunghiul DIE are vârful său I pe bisectoarea unghiului AOC.

2°. Să se arate că dreapta BI trece prin punctul E.

3°. Care este locul punctului I, când C variază pe sfertul de cerc AB?

V. ALACI

2097. — Să se arate că în orice triunghiu are loc

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{h_a h_b h_c}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C},$$

unde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \sin B & \sin C & \sin A \\ \sin C & \sin A & \sin B \end{vmatrix},$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu ABC.

D-TRU ȚARALUNGA

ERATĂ.

1. În enunțul problemei 2070, propusă la pag. 90 d acest an, se va înlocui ultimul rând prin:

Să se arate când A_1 A *este paralelă cu* PH.

2. În problema 2084, numitorii celor două fracții d primul membru, trebuesc schimbați între ei.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anton Ion (1947, 1948, 1956, 1979, 1988, 2054, 2060, 2061, 2066 2071); **Bordaşiu I. Nicola** (2020, 2030, 2036, 2038, 2043, 2052, 2057); **Cristea D. Viorel** (1777, 1975, 2020, 2036, 2043, 2047, 2052, 2063); **Enăchescu Gr. Ion** 1099, 1427, 1475, 1486, 1496, 1583, 1827, 1829, 1944, 1872, 1874, 1907, 1938, 1948, 1959, 1960, 1975, 1985, 1989, 1992, 1996, 1998, 2013, 2018, 2020, 2021, 2028, 2031, 2033, 2036, 2037, 2038, 2041, 2043, 2045, 2056, 2057, 2060, 2069, 2076, 2077, 2081, 2083, 2086, 2087, 2088, 2089); **Gâţă Gh. Gheorghe** (P., 1980, 1987, 2036); **Georgescu Liliana** (2019, 2052, 2060); **Godea Ioan** (2018, 2020, 2030, 2034, 2036, 2038, 2043, 2052, 2054, 2057); **Grozescu Liviu** (1924, 1931, 1933, 1947, 1948, 1949, 1953, 1955, 1962, 1980, 1987, 1988, 1995, 2005, 2020, 2021, 2023, 2028, 2029, 2030, 2034, 2038, 2041, 2043, 2052, 2054, 2059, 2067, 2071, 2076, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2088); **Ieşan Şt. Alexandru** (2028, 2050, 2060, 2067); **Ionescu Petre** (1370, 1385, 1393, 1402, 1475, 1490, 1555, 1647, 1698, 1838, 1844, 1885, 1890, 1900, 1915, 1921, 1923, 1960, 2004, 2005, 2010, 2018, 2021, 2031, 2036, 2041, 2043, 2045, 2050, 2052, 2066, 2071); **Iosifescu Cicerone** (P., 1916, 1962, 1933, 1938, 2054); **Jung Ladislau** (2060, 2086, 2087); **Kinsky Ioan** (2021, 2028, 2038, 2041, 2052, 2054 2056, 2057, 2059, 2062, 2069, 2071); **Knopf Hermann** (P., 2048, 2060, 2086, 2087); **Luca L. Laurenţiu** (1927, 1948, 1962, 1964, 1981, 1987); **Mahrenholz Johannes** (N., 2059, 2061, 2066, 2067, 2068, 2069, 2071, 2072, 2075, 2077, 2081); **Manolache C. Mircea** (2063, 2067, 2071, 2073); **Moisă I. Gheorghe** (2038, 2043, 2050); **Neumann Maria** (2072); **Păläceanu D. Vasile** (2018, 2019, 2023, 2028, 2036, 2043, 2048, 2067, 2068, 2071, 2082, 2083, 2086, 2087, 2088); **Pop Emil** 2021, 2086 2087, 2088); **Popescu Maria** (1975, 1980, 2005, 2006, 2017, 2020, 2030); **Popescu I. Adrian** (P., 1817, 1906, 1907, 1960, 1962, 1999, 2036, 2054); **Popescu Adrian** (S-Lt) (P., 2018, 2021, 2067); **Preda I. D-tru** (1924, 1931, 1947, 1948, 1955, 1956, 1975, 1980, 1987, 1992, 1995, 1998, 2005, 2006, 2007, 2017, 2021, 2023, 2028, 2031, 2032, 2033, 2036, 2041, 2043, 2054, 2056, 2057); **Sasu I. Ion** (2018, 2036, 2052, 2060, 2076); **Şipoş I. Eugen** (N. P., 1934, 1948 2005, 2021, 2028, 2048, 2054, 2059); **Tarczenski Anton** (2057); **Tigoianu Alexandru** (2041, 2052, 2054, 2061); **Turicu I. Octavian** (2020, 2025, 2031, 2036, 2038 2043, 2063); **Ţarălungă Savel** (1793, 1902, 2054); **Wegener Eugen** (N., P., 1678, 1679, 1687, 1689, 1695, 1714, 1716, 1717, 1763, 1773, 1776, 1777, 1793, 1805, 1817, 1823, 1854, 1874, 1900, 1903, 1904, 1913, 1916, 1918, 1922, 1936 1970, 1973, 1974, 1993, 2010, 2026, 2061, 2063, 2066, 2067, 2068, 2076, 2077).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collabor tions se publient en Allemand, Anglais, Espagnol Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés.

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

În prezent *„Boletin Matematico"*, nu îl primim.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXI, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

ANUL XXII. IANUARIE 1943 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PRETUL UNUI NUMAR 20 LEI PRETUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CPT. C. V. COSTACHESCU: CATEVA CONTRIBUTII LA PROBLEMA LANSARII.

2. NOTE MATEMATICE 24, 25, 26.

3. BIBLIOGRAFIE.

4. PROBLEME REZOLVATE: 1574, 1851, 1885, 1948, 1980, 1987, 1988, 1993.

5. PROBLEME PROPUSE: 2098–2105.

6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice Tipografia Romania

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Dr. Ing. Ştefan Nadaşan** (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — No. 11 TIMISOARA, IANUARIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

CÂTEVA CONTRIBUȚII LA PROBLEMA LANSĂRII

DE

Cpt. C. V. COSTĂCHESCU

Înainte de a întra în tratarea subiectului, voiu expune pe scurt modul cum atacă un submarin din imersiune.

Cred că va interesa pe cititorii revistei, mai ales acum când milioane de tone sunt scufundate de submarine pe întinsul oceanelor și mărilor globului [1].

I.

1. **Triunghiul de lansare.**

a. Fie B o navă care urmează un drum B x, cu o viteză v.

În demonstrațiile care vor urma, nava va fi considerată ca un segment de dreaptă de lungime 2 L, care se deplasează cu viteza v.

— P y drumul urmat de torpilă a cărei viteză este V.

— T centrul conului de războiu al torpilei în momentul lansărei.

Triunghiul format de dreptele T y, B x, T B poartă numele de triunghiu de lansare, (fig. 1).

b. Pentru ca torpila lansată din T să lovească ținta, va trebui ca:

$$\frac{B\,A}{A\,T} = \frac{v}{V}.$$

c. $B\,A = v\,T$.

v, viteza țintei se poate calcula sau aprecia.

Se poate calcula:

— Lăsând se defileze nava inamică de lungime cunoscută 2 L în fața unui fir vertical fix și cronometrând timpul t în care nava își parcurge lungimea sa.

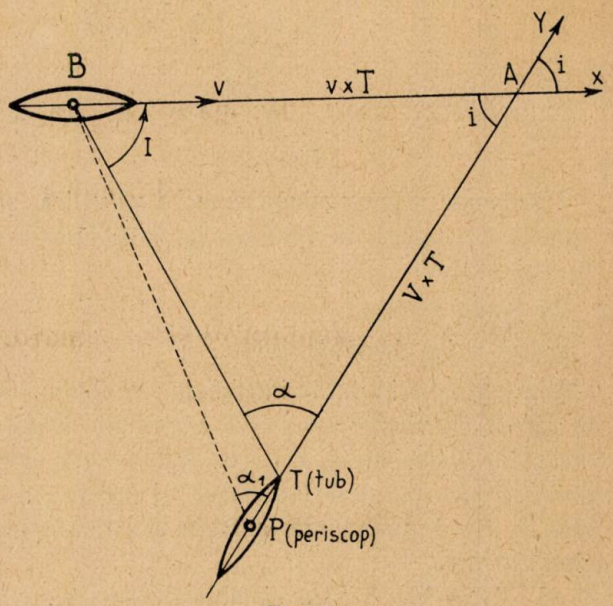


Fig. 1.

Firul vertical fix este adaptat la ocularul periscopului și întregul dispozitiv este în legătură cu busola giroscopică.

v se obține din formula:

$$v\ ^{m}/_{sec} = \frac{2\,L\,(m)}{t\,(sec)}; \qquad v\,\frac{mile}{oră} = 1{,}994\,\frac{2\,L\,(m)}{t\,(sec)}.$$

— Luându-se ținta la relevment constant, se manevrează submarinul modificând viteza și drumul astfel ca unghiul $B_0 P_0 A$ să fie constant, (fig. 2).

În acest caz:

$$\frac{B_0\,A}{\sin\alpha_0} = \frac{P_0\,A}{\sin I_0}; \qquad \frac{v}{\sin\alpha_0} = \frac{v_1}{\sin I_0},$$

de unde

$$v = v_1\,\frac{\sin\alpha_0}{\sin I_0}.$$

[1] Prima parte este după Cursul Domnului Comandor *V. Voinescu, Tactica lansării submarinelor.*

v_1 = viteza submarinului, cunoscută.

α_0 = unghiul dintre drumul submarinului şi direcţia spre ţintă, cunoscut.

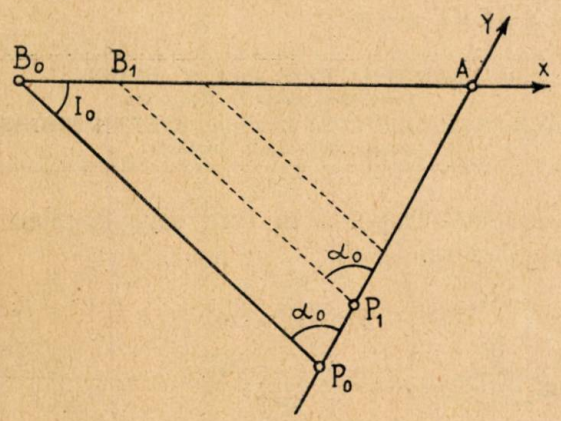


Fig. 2.

I se poate măsura, după cum se va vedea, sau aprecia. O tabelă dă valoarea lui v în funcţie de v_1, α_0 şi I_0.

Se poate aprecia.

După valul făcut de navă.

Viteza submarinului în imersiune este foarte mică în raport cu viteza navelor de suprafaţă. Dacă se merge cu toată viteza, circa 10 Mile pe oră, energia electrică ajunge 1 oră. Dacă se merge cu viteza de 3--4 Mile pe oră, energia electrică ajunge circa 20 ore.

d. $TA = V \times T$ este distanţa de lansare.

V, viteza torpilei, este cunoscută. Torpilele moderne au o cursă până la 10.000 metri. Cursa este în raport invers cu viteza. Distanţele optime de lansare sunt cuprinse între 400—800 metri. Dacă distanţele sunt mai mari, erorile asupra elementelor de lansare pot face ca ţinta să nu fie lovită. În acest caz se lansează mai multe torpile după importanţa ţintei.

e. TB, distanţa între tubul de lansare şi ţintă, PB este distanţa între periscop şi ţintă.

Distanţa PB se poate calcula sau aprecia.

Se poate calcula.

Periscoapele moderne au un dispozitiv special care măsoară unghiul ω sub care se vede catargul H al navei a cărui înălţime este cunoscută

$$PB = H \operatorname{cotg} \omega.$$

Un dispozitiv logaritmic, adaptat tot la periscop, dă valoarea distanţei PB. Aprecierea distanţei depinde de experienţa comandantului.

f. Unghiul XBT poartă numele de înclinare, I.

Inclinarea I se poate calcula sau aprecia.

Se poate calcula printr'un dispozitiv analog cu acela care dă valoarea PB; cunoscându-se lungimea ţintei 2L şi distanţa PB, se poate calcula înclinarea I.

Un comandant cu ochiul format poate aprecia unghiul I cu o eroare de maximum 5°, eroare care nu are mare importanţă dacă se lansează de aproape.

g. *Calculul drumului ţintei.*

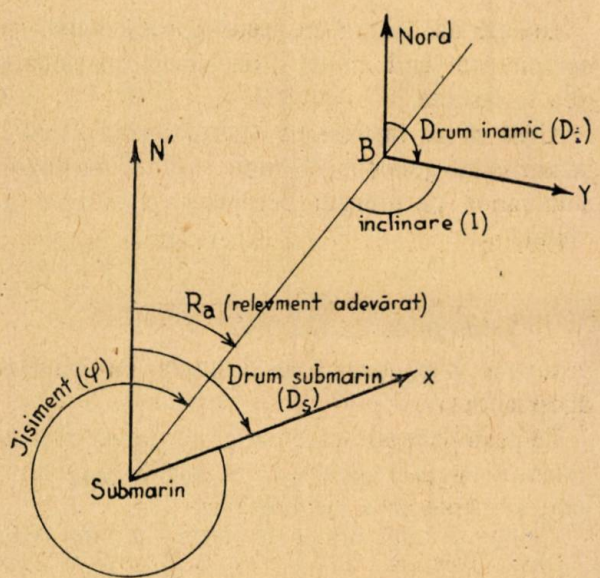


Fig. 3.

Din schiţă se observă că:

$D_s + \varphi - 360^0 = R_a$ şi $D_i = (R_a + 180) - I$.

h. Unghiul yAx sau unghiu de incidenţă.

i. $\sphericalangle BTy = \alpha$ sau unghiu de ochire. Este unghiul între drumul submarinului şi direcţia la ţintă în momentul lansării, vârful aflându-se în centru conului al explosie al torpilei. Acest unghiu se va pune la periscop, după cum vom vedea, astfel ca atunci când ţinta va trece prin firul vertical se va comanda foc!

j. *Calculul unghiului* α.

Unghiul α este dat de două formule,

(1) $$\frac{\sin\alpha}{v}=\frac{\sin I}{V};\qquad \sin\alpha=\frac{v}{V}\sin I;$$

(2) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v\sin i}{V-v\cos i},$$

relaţie care se poate căpăta scoborând o perpendiculara din B pe dreapta T y.

Se poate vedea că:

α se poate calcula din v, V, I sau din v, i, V.

Tabele calculate dinainte dau valoarea unghiului α.

Erorile comise asupra elementelor din care se calculează α (elemente de lansare), pot face ca torpilele lansate să nu lovească ţinta.

2. Ochirea cu periscopul.

Triunghiul de lansare este B T A; periscopul ne fiind însă în T ci în P, pentru a ochi ducem o paralelă din P la dreapta T B. Deci se va da foc când acest punct B_1 va trece prin firul vertical al periscopului, periscopul fiind orientat de unghiul α în raport cu prova navei.

Distanţa B_1B se poate calcula din formulele:

$$B_1B=TP\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+i)},$$

relaţie ce rezultă dintr'un triunghiu format prin ducerea unei paralele din T la B A.

T P este cunoscută. Sau

$$\frac{B_1B}{PT}=\frac{v}{V};\qquad B_1B=PT\,\frac{v}{B}.$$

Prima formulă dă valoarea B_1B din elemente ce trebuesc extrapolate.

A doua formulă este mai simplă şi se poate dinainte calcula.

O tabelă simplă dă valoarea lui B_1B.

3. Zona de lansare.

Locul geometric al punctelor din care un submarin poate lovi o ţintă lansând o torpilă la distanţa d, va fi un cerc de rază d având centrul în C. Acest cerc se numeşte cerc de lansare. Zona determinată de el poartă numele de zonă de lansare.

Problema plasărei constă în determinarea poziţiei optime, pe care trebue să o aibă submarinul în zona de lansare faţă de ţintă în momentul lansării. Această poziţie este funcţie de două elemente:

— Drumul de atac al submarinului (drumul în momentul lansării).

— Distanţa de lansare d.

Drumul de atac este funcţie de incidenţa i.

Aparatul de aprindere al explozibilului torpilei nu funcţionează,

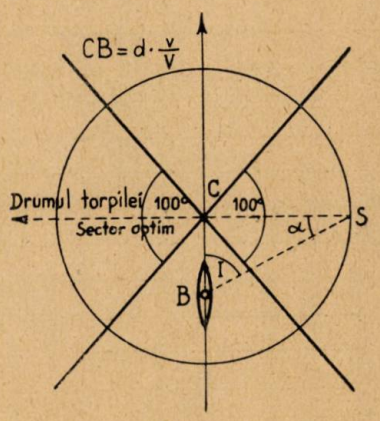


Fig. 4

dacă unghiul i este prea mic sau prea mare. Zona de lansare se reduce la două sectoare de 100° fiecare, după cum se vede din figură (fig. 4), numite sectoare optime.

4. Zona de atac.

Se numeşte locul geometric al punctelor în care trebue să se găsească submarinul pentru a ajunge în poziţie de lansare.

Fie B o ţintă a cărei viteză este v. Cercul cu centrul în C reprezintă cercul de lansare pentru o distanţă de lansare, care dă o bună posibilitate de lovire.

Pentru a putea lansa, submarinul trebue să ajungă într'un punct de pe suprafaţa acestui cerc şi pentru a avea o plasare optimă, trebue să ajungă într'un punct al sectorului optim.

Toate punctele cercului de lansare se deplasează în sensul drumului ţintei cu viteza navei, v, (fig. 5). Dacă dintr'un punct B′ ducem un vector B′ O=K . v şi din O descrim un cerc cu rază K . v_s (v_s=viteza submarinului), acest cerc reprezintă locul punctelor din care submarinul poate întâlni în O punctul B′.

Tangentele duse din B′ la acest cerc vor determina sectorul în care trebue să se găsească submarinul pentru a întâlni punctul B′.

Tangentele duse din B′ la acest cerc, vor determina sectorul în care trebue să se găsească submarinul pentru a întâlni punctul B′.

Se observă că, $\sin\theta = \frac{v_1}{V}$.

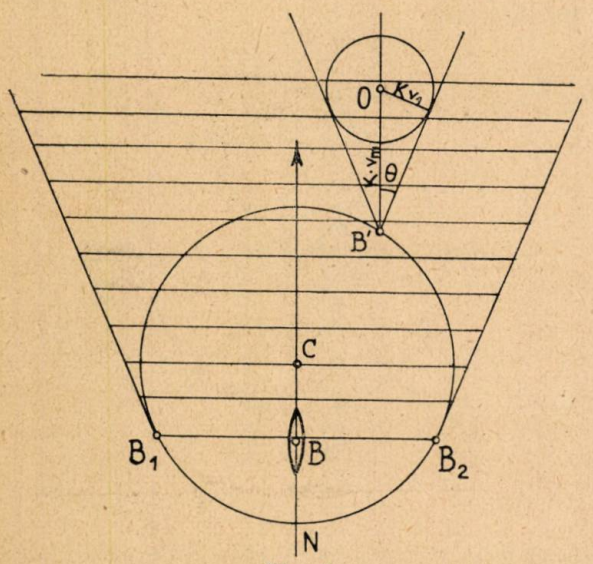


Fig. 5.

Repetând operația pentru toate punctele cercului de lansare, se determină o zonă mărginită de cele două tangente în B_1 și B_2 și de arcul $B_2 N B_1$. Submarinul va putea ajunge în poziție de lansare numai dacă se găsește la începutul manevrei în această zonă numită zonă de atac.

5. **Drum de goană.**

Fie B o țintă, care are o viteză v și urmează

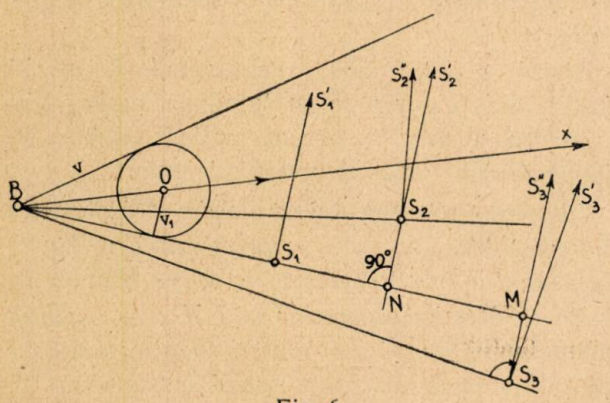


Fig. 6.

un drum BX. Se ia $BO = v$. Din O ca centru se descrie un cerc cu rază v_1. Se duc din B două tangente. Din figură (fig. 6) se observă că un submarin poate fi:

— pe una din tangente (S_1);

— în interiorul tangentelor (S_2);

— în exteriorul tangentelor (S_3);

În cazul când se găsește în S_1, drumul perpendicular pe tangentă, duce la coliziune cu nava. În cazul când se află în S_3 și se ia drumul $S_3 S_3''$ perpendicular pe tangentă, ținta va trece la minima distanță $S_3 M$ după cum se vede ușor din figură.

Deci, atunci când se vede o țintă, comandantul determină sensul ei de mișcare și ia un drum astfel ca unghiul $\widehat{S_3' S_3 B}$ să fie egal cu 90° (ia ținta la travers), observă apoi ce face relevmentul $(\widehat{S_3' S_3 B})$. Dacă relevmentul scade, ținta va trece prin prova submarinului; deci submarinul se află în afara celor două tangente. În acest caz, drumul submarinului se abate spre țintă cu unghiul $\widehat{S_3' S_3 S_3''}$, care este egal cu unghiul $\widehat{S_3 B M}$; drumul este astfel perpendicular pe tangentă. Când ținta va trece prin prova submarinului, distanța va fi $S_3 M$, minimă.

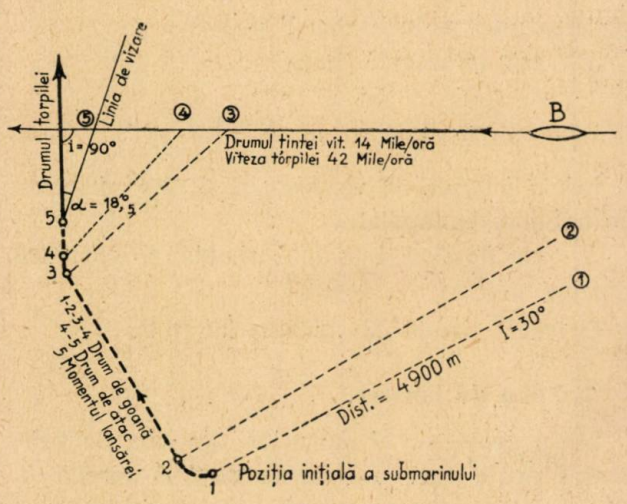


Fig. 7.

În momentul când s'a ajuns în apropierea cercului de lansare, se va lua drumul de atac pentru o incidență i ce se fixează dinainte. Pe timpul goanei se pot face și variații de viteză în funcție de variația relevmentului la țintă.

Dacă submarinul se află în S_2 şi se ia drumul $S_2 S_2'$ perpendicular pe tangentă, în momentul când ţinta ajunge în pupa submarinului, distanţa dintre submarin şi ţintă este maximă ($S_2 N$). Deci submarinul va lua drumuri, care îl duc să se plaseze cât mai spre prova ţintei. În momentul când s'a plasat înspre provă şi în interiorul cercului de lansare, se ia drumul de atac, funcţie de drumul ţintei.

În rezumat atacul unui submarin cuprinde două faze:

— prima fază, goana unui punct de pe cercul de lansare pentru a avea o bună plasare; în timpul goanei se determină drumul şi viteza ţintei.

— a 2-a fază, luarea drumului de atac, funcţie de drumul navei.

Se calculează unghiul α şi se pune la periscop. În momentul când firul vertical al periscopului trece prin punctul B_2, se dă foc.

Lansări deviate.

Pentru menţinerea direcţiei, torpila are un giroscop, care acţionează asupra cârmei verticale şi face ca torpila să păstreze drumul submarinului din momentul dării focului.

Dacă se deviază giroscopul, torpila, dupăce iese din tub, face o giraţie de unghiul pus la giroscop, şi-şi menţine apoi direcţia. Lansările executate în acest fel, poartă numele de lansări deviate.

— *Lansări deviate de 90°*, (fig. 8).

Să considerăm o navă B, care are un drum BX şi un submarin S, care are un drum paralel cu drumul navei. Se cere momentul când se va lansa torpila, dacă deviază giroscopul cu 90°, (fig. 8).

Torpila lansată din T va urma drumul T R M Z. Prelungim dreapta M Z în sens opus şi luăm punctul T' astfel ca M T' = lungimea arcului de 90°, T M. Unim T' cu B.

Se consideră că torpila a fost lansată din T' urmând drumul T' Z. In acest caz, avem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{V}; \quad v = \text{viteza ţintei}, \quad V = \text{viteza torpilei}.$$

Din P ducem o paralelă la T' B, care intersectează B x în B_1. Deci, submarinul va lansa atunci, când punctul B_1 va trece prin firul vertical al periscopului, la periscop punându-se unghiul $90° + \alpha$.

Pentru a materializa acest punct B_1 se va calcula distanţa $B B_1$, care poartă numele de *mica paralaxă*.

$$B_1 B = S_a, \qquad S_a = P T + T b - a b.$$

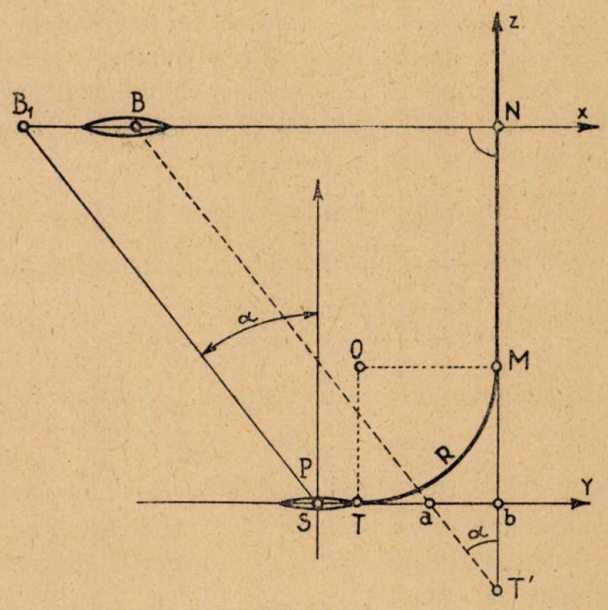


Fig. 8.

P T este distanţa între periscop şi tubul de lansare, cunoscută.

T B este raza de giraţie a torpilei, cunoscută

$$a b = b T' \operatorname{tg}\alpha,$$

$$b T' = T R M - R = \frac{\pi R}{2} - R = R\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Înlocuind, avem:

$$B_1 B = P T + R - R\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\operatorname{tg}\alpha,$$

sau

$$B_1 B = (P T + R) - 0{,}57\, R \frac{v}{V}.$$

Un tabel dă valoarea lui $B_1 B$ pentru diverse viteze ale ţintei.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

25. — *Pe marginea unei probleme.*

Iată şi o altă soluţie a problemei de care s-a ocupat D-l Prof. *N. Abramescu* în articolul de la pag. 118 din numărul precedent al revistei acesteia.

Dacă se notează cu a latura comună a celor trei patrate, se vede imediat de pe figura de la pag. 118 a numărului precedent că laturile triunghiurilor OB_1B_2 şi OA_2B_3 sunt respectiv:

$$\overline{OB_1} = a\sqrt{2};\quad \overline{OB_2} = a\sqrt{5};\quad \overline{B_1B_2} = a,$$

$$\overline{OA_2} = 2a;\quad \overline{OB_3} = a\sqrt{10};\quad \overline{A_2B_3} = a\sqrt{2},$$

***

$$\frac{OB_1}{OA_2} = \frac{OB_2}{OB_3} = \frac{B_1B_2}{A_2B_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Triunghiurile sunt asemeni, de unde rezultă că

$$\sphericalangle B_1OB_2 = \sphericalangle B_3OA_3.$$

Cele două triunghiuri considerate, au în plus laturile $\overline{OB_1}$ şi $\overline{A_2B_3}$ egale între ele şi paralele.

Problema conduce şi la o observaţie importantă. Anume, de oarece

$$\frac{A_3B_3}{OA_3} = \operatorname{tg} A_3OB_3 = \frac{1}{3},$$

unghiurile egale B_1OB_2 şi B_3OA_3 *sunt constante* şi cuprinse între $18^0\ 27'\ 4''$ şi $18^0\ 27'\ 5''$ *ori care* ar fi valoarea laturei comune celor trei patrate.

Se deduce din cele precedente că şi unghiurile OB_1B_2, OB_3A_2 *sunt egale între ele şi constante,* oricare ar fi patratele considerate.

O observaţie. Figura $OB_1B_3A_2$ este evident un paralelogram. Ne punem întrebarea: *care sunt paralelogramele* $OB_1B_3A_2$ *pentru care unind pe* O *cu mijlocul* B_2 *al laturei* B_1B_3, *unghiurile* B_1OB_2 *şi* B_3OA_2, *sau unghiurile* B_1B_2O *şi* OB_3A_2 *să fie egale între ele?*

Răspunsul este uşor de dat. Dacă cele două unghiuri sunt egale între ele, triunghiurile OB_1B_2, OA_2B_3 sunt asemeni şi avem

$$\frac{B_1B_2}{A_2B_3} = \frac{OB_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{2B_1B_2}$$

şi cum $\overline{A_2B_3} = \overline{OB_1}$ rezultă că condiţia cerută este

$$\overline{OB_1^2} = \overline{B_1B_2}\sqrt{2},$$

adică latura $\overline{OB_1}$ este diagonală în patratul de latură B_1B_2. Cu alte cuvinte, *paralelogramele căutate, sunt acelea în care unghiurile ascuţite din* O *şi* B_3 *sunt egale cu* 45^0, *iar unghiurile obtuze din* B_1 *şi* A_2 *sunt egale cu* 135^0, deci numai figura de la pagina 118 din numărul precedent.

Se mai observă pe figură că

$$\sphericalangle OB_3B_2 = \sphericalangle A_2OB_3,$$

ca alterne interne, deci

$$\sphericalangle B_1OB_2 = \sphericalangle OB_3B_2 = \text{ct},$$

ceiace arată că cercul OB_2B_3 este tangent laturei OB_1.

G-L GH. BUICLIU

25. — *Asupra unei probleme a Domnului Profesor D. Pompeiu.*

D-l Prof. *N. Abramescu*[1] a dat o soluţie elementară următoarei probleme comunicată de D-l *D. Pompeiu.*

Dacă se consideră trei patrate lipite OA_1B_1C, $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, *unghiurile* B_1OB_2, B_3OA_3 *sunt egale.*

Iată o soluţie a acestei probleme, care va conduce la o generalizare a ei.

Se observă că triunghiurile OB_1B_2, OB_1B_3 sunt asemenea ca având unghiul din B_1 comun şi

$$\frac{OB_1}{B_1B_3} = \frac{B_1B_2}{OB_1}. \tag{1}$$

Relaţiunea (1) este adevărată din cauză că

$$B_1B_2 = OA_1,\qquad B_1B_3 = 2OA_1$$

şi pentrucă

$$\overline{OB_1^2} = 2\overline{OA_1^2}.$$

Rezultă că unghiurile B_1OB_2, B_1B_3O, A_3OB_3 sunt egale şi teorema este demonstrată.

Din demonstraţia dată se deduce că, *dacă se consideră trei paralelograme identice lipite* OA_1B_1C, $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, *pentru care*

$$\overline{OB_1^2} = 2\overline{OA_1^2},$$

unghiurile B_1OB_2, B_3OA_3 *sunt egale*

Condiţiunea precedentă $\overline{OB_1^2} = 2\overline{OA_1^2}$ este satisfăcută dacă paralelogramul este patrat.

D. V. IONESCU

[1]) *N. Abramescu.* Asupra unei probleme a Domnului D. Pompeiu. R. M. T., anul XXII, p. 118.

26. — *O soluție trigonometrică.*

Ne referim la figura de la pag. 118 din N-rul precedent, în care D-nul Prof. *N. Abramescu* demonstrează geometric, că

(1) $$\sphericalangle B_1 O B_2 = \sphericalangle B_3 O A_3 .$$

Trigonometric, demonstrația se face în felul următor. Se consideră triunghiurile dreptunghice $O A_3 B_3$ și $O C B_2$, în care avem evident,

(2) $$\operatorname{tg} \widehat{B_3 O A_3} = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} (45^0 + \widehat{B_1 O B_2}) = 2.$$

Dezvoltând relația 2-a, găsim

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \widehat{B_1 O B_2}}{1 - \operatorname{tg} \widehat{B_1 O B_2}} = 2,$$

de unde

(3) $$\operatorname{tg} \widehat{B_1 O B_2} = \frac{1}{3}$$

și prin urmare din (2) și (3) rezultă imediat egalitatea (1).

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, Decemvrie 1942. Generalizarea unor identități ale lui *Euler* și a D-lui Prof. *A. G Ioachimescu.* de *N. V. Ghircoiașiu*, Câteva aplicațiuni ale coordonatelor isotrope, de *Șerban Gheorghiu.* Note, probleme rezolvate și propuse.

2. *Buletinul Politehnicei din București*, Anul XIII, 1942, Nr. 1—2. Bibliographie des publications de M. Le Prof. *N. Vasilesco Karpen*, par Ing. *Păduraru.* Sur les points de contact du cercle de neuf points d'un triangle avec les tangents aux trois côtés, par *R. Bouvaist.* Sur l'exagone à côtés parallèles trois par trois, par *V. Thébault.* Quelques considérations sur la perspective, par *Adrian Gheorghiu.* Formes diverses du théorème des accroissements finis, par *D. Pompeiu.* Sur un problème pour les fonctions harmoniques dans un cercle, par *Nicolas Cioranescu.* Einige neue Betrachtungen über die Kriterien erster und zweiter Art, für die Zeichen mit positiven Gliedern, von *Virgil Claudian.* Nouveaux points de vue sur quelques théorèmes fondamentaux de la Mécanique des fluides, par *I. Cârstoiu.* Sur les miroirs paraboliques, par *B. Bianu.* Sur le mécanisme de la pression osmotique, par *Er. Toporescu.* Sur la bronométrie, par *Constantin Belcot.* Contribution à la chloruration du propane, par *Th. D. Ionesco* et *Const. Cretzulesco.* Phénomènes techtoniques dans les sub carpates roumaines, par *Mircea D. Ilie.* Die bisher aus der Dobrogea bekanntgewordenen Lecanoraceen, von *Paul Cretzoiu.* Zur Kenntnis der Eichenformen des Bezirkes Vlașca in der Walachei, von *C. C. Georgescu, P. Cretzoiu* und *I. Lupe.* Résistance des constructions chargées au dela des prévisions réglementaire, par *Cristea Mateescu.* Das Quellen des Zementmörtels in feuchter Luft, von *C. C. Teodorescu.* Untersuchungen über die Zersetzung der erhästeten Mörtels und Betons mit Salzsäure, von *A. Steopoe.* Au sujet de la connexion entre les phénomènes électriques et magnétiques, par *C. Budeanu.* Aspects physiques et mathématiques des phénomènes transitoires, par *I. Constantinescu.* Sur les conditions de fonctionnement des réseaux triphasés déséquilibrés, par *Gheorghe Petrescu.* Augmentation de la capacité de trafic d'une ligne de chemin de fer par doublement ou par électrification de la ligne, par *Ion S Gheorghiu.* Un nouveau circuit sélectif, par *Matei Gh. Marinescu.* Résonance des circuits couplés, par *T. Tănăsescu.* Beitrag zum Entwurf von Wasserturbinen, von *Dorin Pavel.* La balistique du bonbardement aérien, par *I. Linteș.* L'emplacement des langerons dans la profondeur des ailes de l'avion, par *Gr. Zamfirescu.* Sur la stabilité statique longitudinale des biplans, par *N. Tipei.* Der Sättigungszustand des Bodens und die Wasserstoffinnenkonzentration der wässerigen Bodensuspension, von *N. C. Cernescu.* Wiederholte Bodenauszüge mittels Ultrafiltration, von *Const. D. Chiriță.* Topitoarele dela Baia-de-Aramă din timpuri preistorice până la sfârșitul sec. XVII, de Ing *Al. Ostașco.* Orientation phototropique en urbanisme, par *Cincinat I. Sfintescu.*

3. *V. Vâlcovici.* Sur certaines intégrales premières des équations du mouvement des systèmes. (Académie Roumaine, Bulletin de la section scientifique, T. XXV, No. 2.)

4. *M. Ghermănescu.* Mouvements d'un solide autour d'un point fixe. (Académie Roumaine, Bulletin de la section scientifique, T. XXV, No. 1).

5. *I. G. Murgulescu* und *E. Latiu.* Direkte konduktometrische Methoden. (Sonderdruck aus „Zeitschrift für Electrochemie", 48, 609—618, 1942).

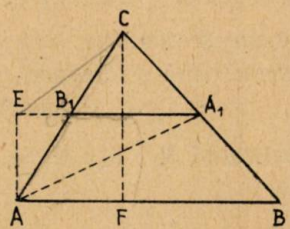
6. *A. Teodosiu.* Proecțiunea conformă a elipsoidului terestru pe sfera lui *Gauss.* (Extras din Buletinul Facultății de Agronomie, V. IX, 1941—42).

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1574 — *Fie* $A B C$ *un triunghiu oarecare,* A_1 *și* B_1 *mijloacele laturilor* $B C$ *și* $A C$. *Unind* A *cu* A_1 *și* A_1 *cu* B_1, *se formează un triunghiu* $A A_1 B_1$.

Să se arate că aria triunghiului $A B C$ *este de patru ori aria triunghiului* $A A_1 B_1$.

SUB-LT C. I. VLAD



Soluția. D-lui *Stamate I. Ionel*: Suprafața triunghiului $A A_1 B_1$ este

$$S = \frac{A_1 B_1 \times A E}{2}.$$

Dar $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$ (fiindcă A_1B_1 unește mijloacele laturilor triunghiului dat), iar $AE = \frac{1}{2} CF$ (fiindcă B_1A_1 trece prin mijlocul laturei AC și e paralelă cu latura AF, deci înjumătățește și înălțimea CF).

Prin urmare, avem

$$S = \frac{1}{4} \cdot \frac{AB \times CF}{2} = \frac{1}{4} \cdot \text{aria triunghiului } ABC.$$

Alte soluții bune date de d-nii: *Aman V. C-tin* (Polit., Timișoara), *Anastasescu M. Mihail* (Ploești), *Anastasiu M. Mihail* (Târgoviște), *Andonie Șt. Mihail* (Polit. București), *Andrunachievici Al. Vladimir* (student, Iași), *Apostol Radu* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Babețiu T. Corneliu* (Timișoara), *Berinde L. Titus*, *Buznea D. Dinu* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Cernat Camil* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Cetățeanu Stelian* (Lic. Sincai, București), *Cristescu Dan* (Lic., Brașov), *Dăscălescu Șt. Hristache* (Focșani), *Diaconescu Ion* (T.-Severin), *Enache Ioan* (Lic. Milit., Tg.-Mureș), *Gligor N. Ioan* (Lic., Arad), *Jidanu I. C.* (Lic., Beiuș), *Kornis Ernst* (Timișoara), *Lupescu Corneliu* (S.-Lt., Roman), *Malaxa C. N.* (Lic. Lazăr, București), *Marcuzon L.* (Iași), *Matei D. D-tru* (Lic. Internat, Iași), *Mihu Nicolae* (Șc. Navală, Constanța), *Modâlca S. Emil* (T.-Severin), *Motăș Camil* (Lic. Internat, Iași), *Murgu V. Marțian* (Polit., Timișoara), *Negrea Mircea* (Brăila), *Petrescu C. Alin* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu P. Benone* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Popescu Adrian* (S.-Lt.), *Popescu V. Florian* (Polit., București), *Popescu N. Zorica* (București), *Popoviciu Gabriel*, *Popoviciu Mircea* (Lic., Lugoj), *Porumbescu T. D-tru* (T.-Ocna), *Rădulescu Gh. Octavian* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Reicher L. H.* (Iași), *Rosenblatt Milu* (Iași), *Roth I. Alexandru* (lic. Arad), *Saegiu V. C-tin* (Cluj), *Săruleșteanu I. Emanoil* (Lic. Spiru Haret, București), *Segal Zoe* (București), *Solomon I.* (Iași), *Stefănescu D. Nicolae* (Lic. Milit., N. Filipescu), *Stoenescu D. Mirel*, *Tica P. Marin* (Lt) *Tilică C. Ștefan* (T-Severin) și *Theodorescu Dorin* (Lic. Milit., N. Filipescu).

Problema 1851. — *Să se arate că dacă una din ecuațiile*

$$x^2 + (2q - p^2)x + q^2 = 0,$$
$$x^2 + (p^3 - 3pq)x + q^3 = 0,$$
$$x^2 + (4p^2q - 2q^2 - p^4)x + q^4 = 0$$

are rădăcini reale și distincte, atunci și celelalte două au rădăcini reale și distincte.

ION MARGINEANU

Soluție. Realizanții R_1, R_2, R_3 ai ecuațiilor date sunt respectivi

$$R_1 = (2q - p^2)^2 - 4q^2 = p^2(p^2 - 4q);$$

$$R_2 = (p^3 - 3pq)^2 - 4q^3 = p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 4q^3$$
$$= p^4(p^2 - 4q) - 2p^2q(p^2 - 4q) + q^2(p^2 - 4q)$$
$$= (p^2 - 4q)(p^2 - q)^2;$$

$$R_3 = (4p^2q - 2q^2 - p^4)^2 - 4q^4$$
$$= (4p^2q - p^4)(4p^2q - 4q^2 - p^4)$$
$$= p^2(4q - p^2)[-(p^2 - 2q)^2]$$
$$= p^2(q^2 - 4q)(p^2 - 2q)^2.$$

Acum este evident că R_1, R_2, R_3 sunt simultan pozitivi, negativi sau nuli, după cum expresia

$$p^2 - 4q \gtrless 0.$$

Urmează de aci că dacă una din ecuațiile date are rădăcini reale, trebuie să avem

$$p^2 - 4q > 0,$$

dar în acest caz și celelalte două ecuații au rădăcinile reale. Aceiași afirmație pentru cazul rădăcinilor imaginare.

Soluții bune date de d-nii: *Aldea V. Minea* (Buzău), *Bakonyi C. C.* (Polit., Timișoara), *Cristea I. N.* (bacalaureat), *Gligor N. Ioan* (lic. Arad), *Dr. A. Gloden* (Luxemburg), *Ionescu F. Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Luca I. Ioan* (Polit., Timișoara), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Radoslav Gh. I.* (Polit., București) și *Simon S. Petru* (lic. Arad).

Problema 1885. — *Să se demonstreze formula*

$$C_m^n = C_k^0 C_{m-k}^n + C_k^1 C_{m-k}^{n-1} + C_k^2 C_{m-k}^{n-2} + \cdots$$
$$+ C_k^{k-2} C_{m-k}^{n-k+2} + C_k^{k-1} C_{m-k}^{n-k+1} + C_k^k C_{m-k}^{n-k},$$

k fiind un număr care satisface condiției, $k \leq m - n$.

EUGEN VISA

Prima soluție. Să considerăm dezvoltările cunoscute:

$$(x+1)^{m-k} = C_{m-k}^0 x^{m-k} + C_{m-k}^1 x^{m-k-1} + \cdots$$
$$+ C_{m-k}^{n-1} x^{m-k-n+1} + C_{m-k}^n x^{m-k-n} + \cdots + C_{m-k}^{n-k} x^{m-n}$$
$$+ C_{m-k}^{n-k+1} x^{m-n-1} + \cdots + C_{m-k}^{m-k-1} x + C_{m-k}^{m-k},$$
$$(x+1)^k = C_k^0 x^k + C_k^1 x^{k-1} + C_k^2 x^{k-2} + \cdots$$
$$+ C_k^n x^{k-n} + \cdots + C_k^{k-2} x^2 + C_k^{k-1} x + C_k^k.$$

Înmulțind aceste egalități și identificând apoi coeficienții lui x^{m-n} din ambii membrii, obținem tocmai identitatea cerută. Condiția $k \leq m - n$ se vede că este necesară.

Soluții analoage date de d-ra *Checian Ana* (studentă, Timisoara) și d-l *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara).

Soluția 2-a, dată de autor și de D-l *Simon S. Petru* (Arad).

Considerăm formula cunoscută din teoria combinărilor.

$$(1) \qquad C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$$

și aplicând această formulă fiecărui termen din membrul al 2-lea, avem

$$(2) \qquad C_m^n = (C_{m-2}^n + C_{m-2}^{n-1}) + (C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}) = C_{m-2}^n + 2\,C_{m-2}^{n-1} + C_{m-2}^{n-2}.$$

Efectuând aceiași descompunere (1) fiecărui termen din ultimul membru, găsim

$$(3) \qquad C_m^n = C_{m-3}^n + 3\,C_{m-3}^{n-1} + 3\,C_{m-3}^{n-2} + C_{m-3}^{n-3}.$$

Procedând analog, ajungem la formula din enunț.

Putem demonstra mai riguros însă formula cerută, cu ajutorul metodei inducției complete; adică, admițând că formula dată este adevărată pentru $k = \alpha$,

$$(4) \qquad C_m^n = \sum_{p=0}^{p=\alpha} C_\alpha^p\, C_{m-\alpha}^{n-p},$$

să demonstrăm că ea este adevărată și pentru $k = \alpha + 1$,

$$(5) \qquad C_m^n = \sum_{p=0}^{p=\alpha+1} C_{\alpha+1}^p\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-p}.$$

În adevăr, conform formulei (1), avem

$$C_{m-\alpha}^{n-p} = C_{m-(\alpha+1)}^{n-p} + C_{m-(\alpha+1)}^{n-(p+1)}$$

și multiplicând cu C_α^p, găsim

$$C_\alpha^p\, C_{m-\alpha}^{n-p} = C_\alpha^p\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-p} + C_\alpha^p\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-(p+1)}.$$

Dacă în această soluție facem pe rând $p = 0, 1, 2, \ldots, \alpha$ și adunăm obținem succesiv

$$(6) \qquad \sum_{p=0}^{p=\alpha} C_\alpha^p\, C_{m-\alpha}^{n-p} = \sum_{p=0}^{p=\alpha} C_\alpha^p\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-p} +$$

$$\sum_{p=0}^{p=\alpha} C_\alpha^p\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-(p+1)} = \sum_{p=0}^{p=\alpha} C_\alpha^p\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-p} +$$

$$\sum_{p=1}^{p=\alpha+1} C_\alpha^{p-1}\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-p} = C_\alpha^0\, C_{m-(\alpha+1)}^n +$$

$$\sum_{p=1}^{p=\alpha} (C_\alpha^p + C_\alpha^{p-1})\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-p} + C_\alpha^\alpha\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-(\alpha+1)}.$$

Cum primul membru este C_m^n în virtutea relației (5), iar

$$C_\alpha^0 = C_{\alpha+1}^0, \quad C_\alpha^p + C_\alpha^{p-1} = C_{\alpha+1}^p, \quad C_\alpha^\alpha = C_{\alpha+1}^{\alpha+1},$$

rezultă că relația (6), devine

$$C_m^n = C_{\alpha+1}^0\, C_{m-(\alpha+1)}^n + \sum_{p=1}^{p=\alpha} C_{\alpha+1}^p\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-p} + C_{\alpha+1}^{\alpha+1}\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-(\alpha+1)},$$

sau

$$C_m^n = \sum_{p=0}^{p=\alpha+1} C_{\alpha+1}^p\, C_{m-(\alpha+1)}^{n-p},$$

adică tocmai relația (5).

Prin urmare, admițând formula dată pentru $k = \alpha$, am demonstrat că ea este adevărată și pentru $k = \alpha + 1$.

Cum relațiile (1), (2), (3) ne invederează că formula din enunț este adevărată pentru $k = 1, 2, 3$, rezultă că este adevărată în general.

Problema 1948. — *Dacă numerele* $a, b, c, \ldots, k, l$ *sunt proporționale cu numerele* $a_1, b_1, c_1, \ldots, k_1, l_1$, *să se stabilească relația:*

$$\sqrt{(a^m + b^m + \cdots + l^m)(a_1^m + b_1^m + \cdots + l_1^m)} = \sqrt{a^m a_1^m} + \sqrt{b^m b_1^m} + \cdots + \sqrt{l^m l_1^m}.$$

E. S. MODALCA

Din proporționalitatea numerelor date, rezultă

$$\frac{a^m}{a_1^m} = \frac{b^m}{b_1^m} = \cdots = \frac{l^m}{l_1^m} = A^m,$$

de unde avem succesiv

$$(1) \qquad \frac{a^m + b^m + \cdots + l^m}{a_1^m + b_1^m + \cdots + l_1^m} = \frac{(a^m + b^m + \ldots + l^m)(a_1^m + b_1^m + \cdots + l_1^m)}{(a_1^m + b_1^m + \cdots + l_1^m)^2} = A^m,$$

apoi

$$\frac{a^m a_1^m}{a_1^{2m}} = \frac{b^m b_1^m}{b_1^{2m}} = \cdots = \frac{l^m l_1^m}{l_1^{2m}} = A^m,$$

$$\frac{\sqrt{a^m a_1^m}}{a_1^m} = \frac{\sqrt{b^m b_1^m}}{b_1^m} = \cdots = \frac{\sqrt{l^m l_1^m}}{l_1^m} = \sqrt{A^m},$$

(2) $$\frac{\sqrt{a^m a_1^m}+\sqrt{b^m b_1^m}+\cdots+\sqrt{l^m l_1^m}}{a_1^m+b_1^m+\cdots+l_1^m}=\sqrt{A^m}.$$

Comparând (1) și (2) se găsește relația din enunț.

S-au primit foarte bune soluții analoage de la d-nii: *Brânceni I. B., Brânceni I. C, Ghimuș A. D.* (Lic. Lazăr, București), *Gligor N. I.* (Șc. Of. rez, Craiova), *Ionescu F. P.* (Lic. Carol I, Craiova).

G-l Gh. B.

Problema 1980. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x(xy^3+1)=y(x^3+y) \\ y(x^3y+1)=x(y^3+x). \end{cases}$$

IONEL I. STAMATE

Soluție. Sistemul dat se mai poate scri

$$\begin{cases} y^2(x^2y-1)-x(x^2y-1)=0 \\ x^2(xy^2-1)-y(xy^3-1)=0, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} (x^2y-1)(y^2-x)=0 \\ (xy^2-1)(x^2-y)=0. \end{cases}$$

Acest sistem este echivalent cu următoarele sisteme

(1) $\begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0, \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-y=0 \\ x^2y-1=0, \end{cases}$

(3) $\begin{cases} xy^2-1=0 \\ y^2-x=0, \end{cases}$ (4) $\begin{cases} xy^2-1=0 \\ x^2y-1=0. \end{cases}$

Să rezolvim pe rând aceste sisteme.

1. Sistemul (1) se mai poate scri,

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x(x^3-1)=0, \end{cases}$$

de unde urmează soluțiile:

x	0	1	$\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$
y	0	1	$\frac{-1\mp i\sqrt{3}}{2}$

, $(i=\sqrt{-1})$.

2. Sistemul (2) se poate scri încă

$$\begin{cases} x^2=y \\ y^2=1, \end{cases}$$

de unde urmează sistemele de soluții:

x	1	-1	i	$-i$
y	1	1	-1	-1

.

3. Sistemul (3), obținându-se din (2) înlocuind x prin y, admite soluțiile

x	1	1	-1	-1
y	1	-1	i	$-i$

.

4. În fine sistemul (4), se poate pune forma

$$\begin{cases} x=\frac{1}{y^2} \\ y^3-1=0, \quad \text{(presupunând } y\neq 0\text{)}, \end{cases}$$

de unde deducem soluțiile:

x	1	$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
y	1	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

Au dat soluții d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara), *Boerescu G P.* (Lt, Constanța), *Brânceni I. Călin* (Lic. Lazăr, București), *Brânceni I. Bogdan* (Lic. Lazăr, București), *Deheleanu Gh.* (Polit., Timișoara), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timișoara), *Gâță Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Gligor N. Ioan, Godea I.* (A dat numai soluția $x=y=1$), *Grozescu Liviu* (Lic. Beiuș), *Ionescu F. Petre* (A dat numai soluția $x=y=1$). *Iosifescu Cicerone* (A dat numai soluția $x=y=1$), *Preda I. D-tru* (Lic. Slatina), *Șipoș I. Eugen* (Polit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

Problema 1987. — *Numerele, a, b, c formează o progresie geometrică a cărei sumă este 124; adăogând termenului mijlociu pe 32, progresia devine aritmetică. Să se determine cele trei numere.*

FLORIAN GOGA

Soluție. Fie a, aq, aq^2 trei numere în progresie aritmetică.

Conform enunțului, avem

(1) $$\begin{cases} a+aq+aq^2=124 \\ aq^2-(aq+32)=(aq+32)-a. \end{cases}$$

Scăzând a 2-a ecuație din prima, obținem

$$3aq+64=124,$$

sau

(2) $$aq=20.$$

Înlocuind această valoare în prima ecuație din (1), avem

$$a+20+20q=14,$$

sau

$$a+20q=104. \tag{3}$$

Egalând valorile lui a din (2) şi (3), găsim

$$\frac{20}{q}=104-20q,$$

sau

$$20q^2-104q+20=0.$$

De aci deducem

$$q=\frac{52\pm\sqrt{2304}}{20}=\frac{52\pm48}{20},$$

deci

$$q_1=5 \quad \text{şi} \quad q_2=\frac{1}{5}.$$

Corespunzător acestor valori, din (3) rezultă

$$a_1=4 \quad \text{şi} \quad a_2=100.$$

Prin urmare progresia geometrică cerută este

$$\div 4:20:100, \quad \text{sau} \quad \div 100:20:4.$$

Soluţii bune date de d-nii: *Boerescu P. G.* (S-Lt, Constanţa), *Cristea D. Viorel* (Polit, Timişoara), *Deheleanu Gh.* (Polit., Timişoara), *Godea Ioan*, *Grozescu Liviu* (Lic. Beiuş), *Ionescu F. Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Iosifescu Cicerone*, *Kinshy Ioan* (Timişoara), *Luca H. Ioan* (Polit., Timişoara), *Luca L. Laurenţiu* (Polit., Timişoara), *Machedon Dan* (Lic. Lazăr, Bucureşti), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Manolache C. Mircea* (Lic. Internat, Iaşi), *Mihaluc I. Ilie* (Lic. Milit, Timişoara), *Pleşu Mircea* (Lic. Deva), *Popescu I. Adrian* (Lic Slatina), *Roshenstein B.* (Timişoara), *Sabău C.* (Lic. Beiuş), *Soare M. Mircea* (Lic. Milit., Cernăuţi), *Staicu Constantin* (Lic. Milit., Cernăuţi), *Tarczenski Antoni* (Student, Timişoara), *Ţarălungă Savel* (Lic. Internat, Iaşi) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1988. — *Presupunând* $|a|\neq 1$, *să se discute sistemul:*

$$\begin{cases} x+by+z=a \\ ax+y+bz=1 \\ x+ay+z=b \end{cases}$$

CORNELIA NANES

Soluţie. Determinantul sistemului este

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^2.$$

Acum distingem următoarele cazuri:

1°. Cazul $a\neq b$. In acest caz sistemul este compatibil şi determinat, iar regula lui *Cramer* ne dă

$$x=\frac{\Delta_1}{(a-b)^2}=\frac{2-ab-b^2}{a-b}, \quad y=\frac{\Delta_2}{(a-b)^2}=-1,$$

$$z=\frac{\Delta_3}{(a-b)^2}=\frac{a^2+ab-2}{a-b},$$

fiindcă

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 1 & b \\ b & a & 1 \end{vmatrix}=a+a+b^3-b-a^2b-b=$$

$$2(a-b)-b(a^2-b^2)=(a-b)(2-ab-b^2)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}=-(a-b)^2,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & b & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & b \end{vmatrix}=b+a^3+b-a-a-ab^2=$$

$$a(a^2-b^2)-2(a-b)=(a-b)(a^2+ab-2).$$

2°. *Cazul* $b=a$. In acest caz sistemul se reduce la următoarele ecuaţii,

$$\begin{cases} x+ay+z=a \\ ax+y+az=1, \end{cases} \tag{2}$$

care formează un sistem nedeterminat şi compatibil, căci prin ipoteză având $|a|\neq 1$, rezultă că $a^2-1\neq 0$ şi sistemul (2) rezolvit în raport cu x şi y, ne dă imediat

$$x=-z, \quad y=1.$$

Soluţie dată de d-nii: *Anton Ioan*, *Boerescu P. G.* (S-Lt., Constanţa), *Cristea D. Viorel* (Polit., Timişoara), *Godea Ioan*, *Crozescu Liviu* (Lic. Beiuş), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Manolache C. Mircea* (Lic. Internat, Iaşi), *Morariu M. Iulian* (Student, Timişoara), *Sabău C.* (Lic. Beiuş), *Vicol I. Aurel* (Lic. Piatra-Neamţ) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1993. — *Intr'un triunghiu dreptunghiu avem relaţia*

$$(ab+2pc)\operatorname{cp}B=2ac\cos^2\frac{B}{2},$$

notaţiile fiind cele obicinuite, iar $\operatorname{cp}B$ *însemnând cosinusul patratic al lui* B.

V. ALACI

Soluţie. În virtutea teoremei I-a de la triunghiurile dreptunghice din *„Trigonometria patratică"*, avem

(1) $$c = (b + c)\, cp\, B.$$

Notând cu E primul membru al relației date și înlocuind $cp\,B$ prin valoarea sa scoasă din (1), avem succesiv.

(2) $$E = \frac{[ab + (a + b + c)c]c}{b + c} =$$

$$\frac{(ab + ac)c}{b + c} + c^2 = ac + c^2.$$

Cum de altă parte cunoaștem într'un triunghiu dreptunghiu încă relația

$$c = a \cos B,$$

relația (2) se mai poate scri succesiv

$$E = ac + ac\cos B = ac(1 + \cos B) = 2ac\cos^2\frac{B}{2}.$$

Relația cerută este astfel stabilită.

Soluții bune date de d-nii: *Bakonyi C.* (Polit., Timișoara), *Dobrescu V. Eugen* (Lic, Piatra-Neamț), *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit., Timișoara), *Gloden A.* (Luxemburg), *Ionescu F Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Iosifescu Cicerone* (Lic. Piatra-Neamț), *Luca Ioan* (Polit., Timișoara), *Popescu I. Adrian* (Polit., Timișoara) și *Wegener Eugen* (București).

PROBLEME PROPUSE

2098. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre de forma $abcde$, unde ab, bc, c și $a + b$ sunt patrate perfecte.

GHEORGHE I. DEHELEANU

2099. — Să se stabilească relația,

$$C_p^p C_n^p + C_{p+1}^p C_{n-1}^p + C_{p+2}^p C_{n-2}^p + \cdots$$

$$\cdots + C_n^p C_p^p = C_{n+p+1}^{2p+1},$$

în care simbolul C_k^p reprezintă numărul combinărilor de k obiecte luate câte p.

EUGEN VISA

2100. — Să se găsească condiția convergenței seriei cu termenul general,

$$u_n = \frac{\sin^\alpha \frac{\pi}{\sqrt[4]{n}}}{\sqrt[4\alpha]{n^3 + 1}},$$

α fiind un parametru variabil.

EUGEN ȘIPOS

2101. — Să se găsească minimul expresiei

$$E = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C,$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu.

M. GHERMANESCU

2102. — Într'un cerc dat să se înscrie un triunghiu ABC, cunoscând vârful A, știind că latura BC trece printr'un punct fix și că raportul

$$\frac{AB + AC}{BC}$$

este constant.

Aplicație pentru cazul când acest raport este egal cu 2.

G-L GH. BUICLIU

2103. — În raport cu un sistem de două axe rectangulare, se consideră în plan punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$ și $C(a, b)$.

Fie M un punct variabil pe dreapta BC. Se cere:

1°. Locul piciorului perpendicularei din C pe dreapta OM.

2°. Locul intersecției tangentei în B la curba loc de la 1° cu dreapta OC, când A se mișcă pe axa Ox.

3°. Infășurătoarea tangentei în B la curba loc de la 1°, când punctul B se mișcă pe axa Oy.

EUGEN WEGENER

2104. — a, b, c fiind respectiv ipotenuza și catetele unui triunghiu dreptunghic, să se stabilească relația

$$\sqrt{b + ic} + \sqrt{c + ib} \geq 2\sqrt{ia}.$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

S-LT M GRUMAZESCU

2105. — Să se stabilească identitatea:

$$\prod_{k=0}^{2} \sin^2\left[\frac{(2k+1)\pi}{6} + x\right] + \prod_{k=0}^{2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{3} + x\right) = 2^{-4}$$

V. ALACI

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Anton Ioan (1949, 1980, 1987, 2018, 2020, 2023 2026, 2028, 2029, 2030, 2033, 2034, 2036, 2038, 2041, 2043, 2048, 2052, 2057, 2059, 2067, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088); **Bitany Alexandru** (2018, 2020, 2028, 2036, 2041, 2043, 2052, 2054, 2056, 2057, 2060, 2071, 2086, 2087); **Bordasiu I. Nicolae** (2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2078, 2088, 2089); **Creţa F. Gavril** (2018, 2019, 2019, 2020, 2021, 2023, 2028, 2034, 2036, 2038, 2043, 2045, 2048, 2052, 2066, 2071); **Deme Gheorghe** (2060, 2083, 2084, 2088); **Enăchescu Gr. Ion.** (N., 1626, 1664, 1687, 1688, 1691, 1693, 1726, 1741, 1763 1773, 1776, 1777, 1789, 1790, 1792, 1812, 1851, 1888, 1903, 1962, 1964, 2013, 2030, 2034, 2035); **Gâţă Gh. Gheorghe** (P., 1906, 1947, 1956, 1962, 2043, 2054, 2071); **Georgescu C. Nicolau** (2076, 2083, 2085, 2086, 2087, 2088); **Godea Ioan** (1922, 1938, 1969, 1970, 1989, 2023, 2024, 2028, 2029, 2030, 2041, 2050, 2060, 2061, 2066 2071, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089); **Grozescu Liviu** (1934, 1979, 1981, 2002, 2007, 2008, 2036, 2057, 2060, 2061); **Halil Midbat** (2060); **Iacob Şt. Eugen** (P., N.); **Ieremia I. Aurel** (2028, 2029, 2030); **Kinsky Ioan** (2083, 2085, 2086, 2087, 2088); **Knopf Adalbert** (P., 2094); **Knopf Hermann** (2087, 2094); **Lupescu O. Corneliu** (1965, 1987, 2005, 2007, 2028, 2029); **Mahrenholz Iohannes** (2050, 2054 ,2057, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2088, 2089); **Mihăilescu C. C.** (2004, 2006); **Muţiu Antim** (2023, 2028, 2036, 2038, 2041, 2043, 2052, 2054, 2057, 2060, 2066, 2067, 2068, 2071, 2082, 2083, 2084, 2086, 2087, 2088); **Necula C. Ilie** (2071); **Pălăceanu Vasile** (1726, 1776); **Popescu Adrian** (Lt.) (P., 2028); **Şipoş I. Eugen** (P., 1934, 1949, 1962, 1989, 2020, 2030, 2036, 2043, 2045, 2057, 2063, 2071, 2078, 2082, 2086, 2087, 2088); **Tarczewski Antoni** (2025); **Ţigănoiu Alexandru** (2030, 2036, 2045, 2057, 2060, 2067), **Vicol I. Aurel** (1939, 1962); **Wegener Eugen** (P., 1842, 1946, 2070, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2088, 2089, 2092, 2097); **Wigh Jean** (2083).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés.

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

În prezent „*Boletin Matematico*", nu îl primim.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXI, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

ANUL XXII. 1943 FEBRUARIE 1943 No. 12.

CIO R 104

1-12

SIBIIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 20 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 180 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. **D. POMPEIU**: DESPRE DETERMINANTI.

2. **CPT. C. V. COSTACHESCU**: CATEVA CONTRIBUTII LA PROBLEMA LANSARII (URMARE).

3. NOTE MATEMATICE 27, 28, 29.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 1018, 1605, 1701, 1710 1773, 1985, 1992.

6. PROBLEME PROPUSE: 2106–2113.

7. TABLA DE MATERII.

8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice Tipografia Romaneasca

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie, să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Costul abonamentului pentru anul XXIII (1 Martie 1943 — 1 Martie 1944), este de 250 (două sute cincizeci) lei. Un număr 30 lei.

Rugăm pe d-nii membrii a-i „R. M. T." a trimite de urgenţă, la redacţie, schimbările ce au de făcut relativ la titlurile, ocupaţiile şi adresa actuală, pentru anul XXIII, No. 1, 1943.

Cu plăcere anunţăm, că începând dela 15 lanuarie 1943 mai face parte dintre membrii „R. M. T." D-l Doctor *Em. Arghiriade,* Profesor Secundar şi Conferenţiar de Matematici Generale la Politehnica Timişoara.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: Prof. **V. Alaci,** Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Dr. Ing. Ştefan Nadaşan (Laboratorul de Rezistenţa Materialelor), Şcoala Politehnică, Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) sub contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-luiDr. Ing. ŞTEFAN NADAŞAN, Şcoala Politehnică, Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XXII, de 400 (patru sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XXI inclusiv, broşate, 200 lei fiecare.

ANUL XXII — No. 12 TIMISOARA, FEBRUARIE 1943

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 20 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 180 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politehnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Dr. Ing. ȘTEFAN NADAȘAN
Școala Politehnică, Timișoara.

DESPRE DETERMINANȚI

DE

D. POMPEIU.

1. Un determinant se definește *constructiv*, arătându-se modul cum trebuește operat cu cele n^2 variabile, pentru a forma expresia analitică pe care o numim determinant.

2. Din definiție se deduc apoi o sumă de proprietăți ale determinantului, drept consecințe logice.

3. Dar, privind aceste proprietăți în ele însele, ca proprietăți *date*, ale unei funcții de n^2 variabile — ne putem întreba dacă nu se poate ca de la *genul* determinantului (un determinant este un polinom omogen de gradul n cu n^2 variabile, formând o matrice), să ajungem la *specie* (determinantul propriu zis), impunând polinomului omogen cu n^2 variabile, unele din proprietățile pe care le-am dedus din definiția constructivă a determinantului.

Aceste proprietăți ar fi atunci *caracteristice* determinantului.

Răspunsul este afirmativ.

4. Dacă pornim de la *genul* determinantului: *polinom omogen* de n^2 variabile (ale cărui elemente le așezăm în obișnuitul tablou), atunci e destul să introducem proprietatea schimbării de semn [1] (în polinomul omogen) când în tablou se schimbă, între ele, două linii (sau coloane) consecutive — pentru a ajunge de la *genul*-polinom omogen la *specia*-determinant propriu zis, se'nțelege adăugând condiția ca polinomul să se reducă la $+1$, când elementele diagonalei principale sunt toate egale cu $+1$, iar elementele celelalte toate nule.

Prin urmare, proprietatea schimbării de semn a unui determinant, când se schimbă între ele două linii (sau coloane) consecutive — e o proprietate *caracteristică*.

În mod analog pentru a ajunge la *specia*-determinant, plecând tot de la *genul*-polinom omogen cu n^2 variabile, e destul să introducem proprietatea [2] că polinomul se anulează, când în tabloul (despre care a fost vorba), se găsesc două linii (sau coloane) identice. Condiția complementară rămâne aceiași.

Avem dar altă proprietate caracteristică a determinantului.

5. Se poate observa însă că această a doua proprietate, reintră ca un caz particular în propoziția utilizată de *Kowalewski*.

Dar, iată o altă proprietate, tot caracteristică, care permite să trecem de la *genul*-polinom omogen cu n^2 variabile, la *specia*-determinantul propriu zis.

Este proprietatea după care valoarea unui determinant nu se schimbă, dacă la elementele unei linii (sau coloane) adăogăm elementele corespunzătoare ale unei altei linii (coloane), prealabil multiplicate cu un acelaș factor arbitrar, și încă mărginindu-ne la multiplicatorul -1.

Pentru a simplifica scrisul, să considerăm polinomul de gradul al 2-lea, cu patru variabile

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{Vmatrix}$$

adică $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$ = polinom omogen de gradul al 2-lea.

Noi îi impunem condițiile,

$$f(x_1, y_1, x_2 - x_1, y_2 - y_1) \equiv f(x_1, y_1, x_2, y_2),$$

$$f(x_1 - x_2, y_1 - y_2, x_2, y_2) \equiv f(x_1, y_1, x_2, y_2),$$

iar cititorul poate verifica, ușor, că aceste două condiții funcționale, la care se adaogă condiția

[1] *Dr. Gerhard Kovalewski*, Determinantentheorie.

[2] *G. Iliovici* și *Sainte-Laguë*, Algèbre et Analyse.

complementară — reduce polinomul omogen f la forma

$$x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

adică determinantul de ordinul al 2-lea.

Pentru un polinom cu $9 = 3^2$ elemente, se introduc *trei* condiții funcționale, analoage cu cele de mai sus. Și așa mai departe.

CÂTEVA CONTRIBUȚII LA PROBLEMA LANSĂRII

DE

Cpt. C. V. COSTĂCHESCU.

(urmare)

II.

Eroarea în determinarea drumului țintei.

Considerăm $i = 90°$.

Considerăm triunghiul de lansare ABC, (fig. 9).

A punctul inițial al țintei;

B punctul unde torpila se întâlnește cu ținta;

C punctul trăgătorului.

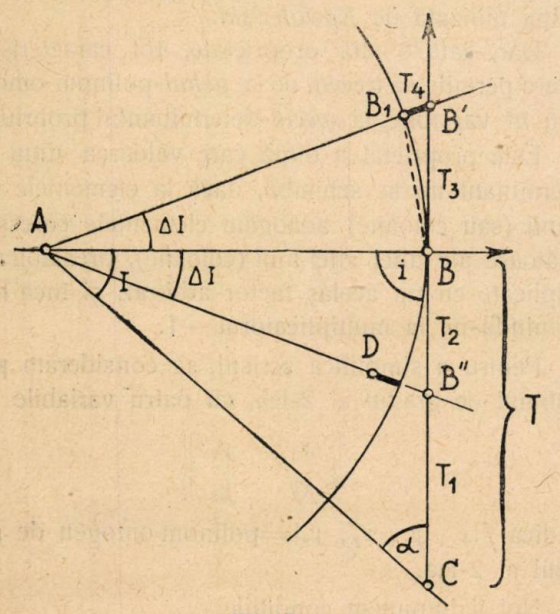


Fig. 9.

Presupunând că torpila lansată din C ovește ținta în B. Lungimea țintei $= 2L$. Dacă se face o eroare ΔI în drumul țintei, se cere să se determine timpul T, astfel ca torpila să lovească totuși ținta. În acest caz va trebui să determinăm punctul C, căci $BC = VT$ (V = viteza torpilei); analog se va determina și punctul A, căci $AB = vT$. După timpul T_1, torpila ajunge în B″, iar după încă un timp T_2, torpila ajunge în B. În momentul când torpila ajunge în B″ trebue să întâlnească nava (punându-se condiția ca eroarea în drumul țintei să fie ΔI). După timpul T_1, nava ajunge in D. Condiția de întâlnire va fi deci:

$$(1) \qquad vT_1 + L = AB'',$$

$$BB'' = AB \operatorname{tg} \Delta I, \qquad VT_2 = vT \operatorname{tg} \Delta I;$$

$$T_2 = \frac{v}{V} T . \operatorname{tg} \Delta I,$$

$$(2) \quad T_1 = T - T_2 = T - \frac{v}{V} T . \operatorname{tg} \Delta I = T\left(1 - \frac{v}{V} \operatorname{tg} \Delta I\right).$$

Înlocuind pe T_1 în relația (1), avem

$$vT\left(1 - \frac{v}{V} \operatorname{tg} \Delta I\right) + L = vT \sec \Delta I,$$

sau

$$vT \sec \Delta I - vT\left(1 - \frac{v}{V} \operatorname{tg} \Delta I\right) = L,$$

din care scoatem valoarea lui T,

$$(3) \qquad T = \frac{L}{v \sec \Delta I - v + \frac{v^2}{V} \operatorname{tg} \Delta I} = \frac{LV}{v[V(\sec \Delta I - 1) + v \operatorname{tg} \Delta I]}.$$

După timpul $T_3 = T_2 = \frac{v}{V} T \operatorname{tg} \Delta I$ torpila a ajuns în B′. În acest punct trebue să întâlnească nava. După timpul T_4 nava ajunge din B_1 în B′

$$(4) \qquad T_4 - \frac{L}{v} \leq T_3 \leq T_4 + \frac{L}{v}.$$

Din triunghiul $B_1 B' B$ se deduce:

$$\frac{vT_4}{\sin \frac{\Delta I}{2}} = \frac{B_1 B}{\cos \Delta I} = \frac{2vT \sin \frac{\Delta I}{2}}{\cos \Delta I}.$$

De unde

$$(5) \qquad T_4 = T \frac{\sin^2 \frac{\Delta I}{2}}{\cos \Delta I}.$$

Inegalitatea (4), devine:

$$T \frac{\sin^2 \frac{\Delta I}{2}}{\cos \Delta I} - \frac{L}{V} \leq \frac{v}{V} T \operatorname{tg} \Delta I \leq T \frac{\sin^2 \frac{\Delta I}{2}}{\cos \Delta I} + \frac{L}{v},$$

$$-\frac{L}{v} \leq \frac{T\left(v \sin \Delta I - V \sin^2 \frac{\Delta I}{2}\right)}{V \cos \Delta I} \leq \frac{L}{v},$$

$$-\frac{L}{v} \leq \frac{2 T \sin \frac{\Delta I}{2}\left(v \cos \frac{\Delta I}{2} - V \sin \frac{\Delta I}{2}\right)}{V \cos \Delta I} \leq \frac{L}{v},$$

$$(6) \quad T = \frac{L V \cos \Delta I}{2 v \sin \frac{\Delta I}{2}\left(v \cos \frac{\Delta I}{2} - V \sin \frac{\Delta I}{2}\right)}.$$

Formula (3) se mai poate scrie

$$(7) \quad T = \frac{L V \cos \Delta I}{2 v \sin \frac{\Delta I}{2}\left(V \sin \frac{\Delta I}{2} + v \cos \frac{\Delta I}{2}\right)}.$$

Vom socoti eroarea pozitivă când ţinta are un drum în afara drumului A B, iar negativă, când drumul ţintei (în raport cu poziţia submarinului) va fi înăuntrul drumului A B.

Exemplu ($i = 90^0$).

$L = 50$ m, $v = 10$ M_m, $V = 40$ M_m, $\Delta I = 10^0$, $T' = 168^s$, pentru o eroare negativă $V T = 3360$ m, $T'' = 348^s$, pentru o eroare pozitivă $V T = 6960$ m.

Dacă sensul erorii este necunoscut, distanţa de lansare va fi de cel mult 3360 m. Orice torpilă cu viteză 40 Nd. va lovi o navă a cărei viteză este de 10 Nd. şi lungime 100 m pentru $i = 90^0$ şi $\Delta I = 10^0$, dacă submarinul se află la o distanţă de cel mult 3360 m de punctul de impact de pe direcţia ţintei.

Celelalte elemente, care intră în calculul unghiului α, trebue însă să fie exacte.

Considerăm cazul

$$i < 90^0.$$

După timpul T_2, torpila din B ajunge în B_2, iar ţinta după timpul T_3 ajunge din B_1 în B_2, (fig. 10).

Ca torpila să lovească ţinta, va trebui să avem dubla inegalitate:

$$(8) \quad T_3 - \frac{L}{v} \leq T_2 < T_3 + \frac{L}{v}.$$

Din triunghiul B A B_2, avem

$$\frac{V T_2}{\sin \Delta I} = \frac{v T}{\sin (i - \Delta I)}, \qquad T_2 = \frac{v T \sin \Delta I}{V \sin (i - \Delta I)}.$$

Din triunghiul B_1 B B_2, avem

$$\frac{v T_3}{\sin\left(i + 90^0 - \frac{\Delta I}{2}\right)} = \frac{2 v T \sin \frac{\Delta I}{2}}{\sin (i - \Delta I)},$$

deci

$$T_3 = \frac{2 T \sin \frac{\Delta I}{2} \cos\left(i - \frac{\Delta I}{2}\right)}{\sin (i - \Delta I)}.$$

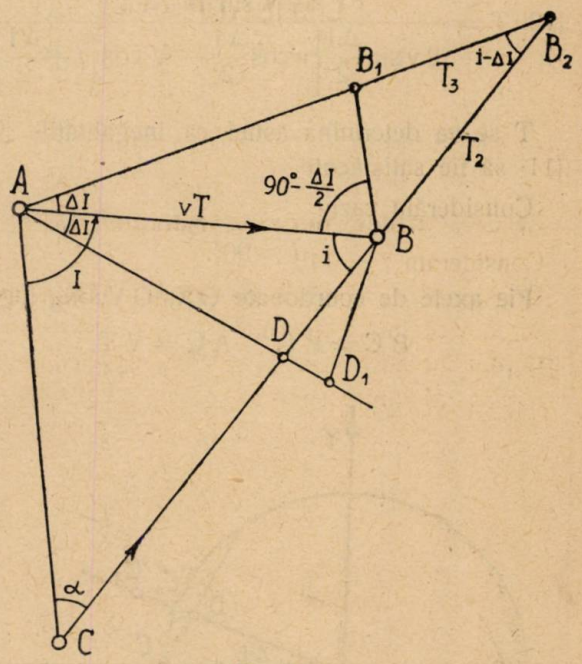


Fig. 10.

Înlocuind în (8), găsim:

$$(9) \quad -\frac{L}{v} \leq \frac{2 \sin \frac{\Delta I}{2} T\left[V \cos \frac{\Delta I}{2} - V \cos\left(i - \frac{\Delta I}{2}\right)\right]}{V \sin (i - \Delta I)} \leq +\frac{L}{v}.$$

In acest caz, avem

$$(10) \quad T = \frac{L V \sin (i - \Delta I)}{2 v \sin \frac{\Delta I}{2}\left[v \cos \frac{\Delta I}{2} - V \cos\left(i - \frac{\Delta I}{2}\right)\right]}.$$

Considerăm eroarea $-\Delta I$.

După timpul T torpila se găseşte în B, iar ţinta în D_1.

Presupunem că torpila şi ţinta merg în sens invers.

După timpul T_2, torpila ajunge în D; iar ţinta după timpul T_3 ajunge în D.

Ca ţinta să fie lovită, va trebui să avem dubla inegalitate:

$$T_3 - \frac{L}{v} \leq T_2 \leq T_3 + \frac{L}{v},$$

sau

$$(11)\quad -\frac{L}{v} \leq \frac{2T\sin\frac{\Delta I}{2}\left[v\cos\frac{\Delta I}{2} - V\cos\left(i+\frac{\Delta I}{2}\right)\right]}{V\sin(i+\Delta I)} \leq +\frac{L}{v},$$

$$(12)\quad T = \frac{L V \sin(i+\Delta I)}{2v\sin\frac{\Delta I}{2}\left[v\cos\frac{\Delta I}{2} - V\cos\left(i+\frac{\Delta I}{2}\right)\right]}.$$

T se va determina astfel ca inegalităţile (9) şi (11) să fie satisfăcute.

Considerăm cazul

$$i > 90^0.$$

Fie axele de coordonate O X, O Y, (fig. 11).

$$B C = v T, \qquad A C = V T.$$

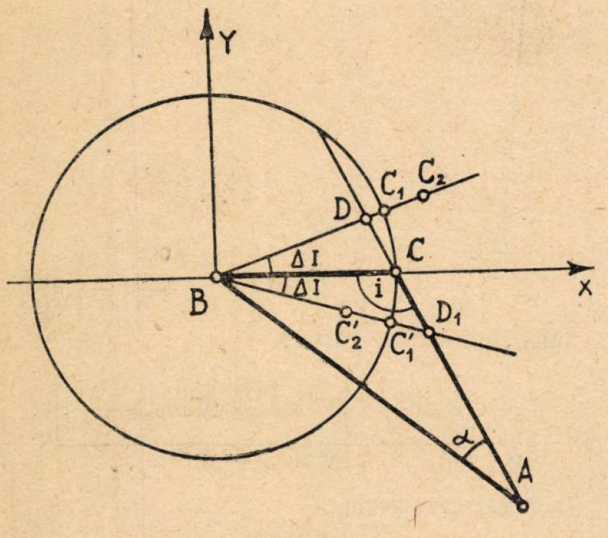


Fig. 11.

Ecuaţia dreptei A C este

$$(1)\quad \frac{x}{vT} - \frac{y}{vT\,\mathrm{tg}\,i} = 1, \quad y = (x - vT)\,\mathrm{tg}\,i.$$

Ecuaţia dreptei $B C_1$ este

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\Delta I.$$

Coordonatele punctului de intersecţie ale celor două drepte sunt:

$$x = \frac{v T \cos\Delta I \sin i}{\sin(i-\Delta I)}, \qquad y = \frac{v T \sin\Delta I \sin i}{\sin(i-\Delta I)}.$$

Distanţa B D este:

$$B D = \frac{v T \sin i}{\sin(i-\Delta I)}, \qquad B C = \frac{v T \sin\Delta I}{\sin(i-\Delta I)}.$$

$$\frac{D C}{V} = T_1 = \frac{v T \sin\Delta I}{V\sin(i-\Delta I)}.$$

În momentul când torpila a ajuns în D, nava se află în C_2,

$$C_1 C_2 = v T_1 = \frac{v^2 T \sin\Delta I}{V\sin(i-\Delta I)},$$

$$B C_2 = v T + \frac{v^2 T \sin\Delta I}{V\sin(i-\Delta I)}$$

$$= v T\left[1 + \frac{v\sin\Delta I}{V\sin(i-\Delta I)}\right].$$

Condiţia ca torpila să lovească ţinta este:

$$B C_1 + C_1 C_2 - B D \leq L.$$

Înlocuind, avem

$$v T + \frac{v^2 T \sin\Delta I}{V\sin(i-\Delta I)} - \frac{v T \sin i}{\sin(i-\Delta I)} \leq L.$$

$$T \leq \frac{V L \sin(i-\Delta I)}{2v\sin\frac{\Delta I}{2}\left[v\cos\frac{\Delta I}{2} - V\cos\left(i-\frac{\Delta I}{2}\right)\right]}.$$

T este infinit când:

$$\frac{v}{V} = \frac{\cos\left(i-\frac{\Delta I}{2}\right)}{\cos\frac{\Delta I}{2}}, \quad \text{sau} \quad \Delta I = 0.$$

În aceste cazuri, distanţa de lansare va fi oricât de mare, dacă nu există alte erori.

Considerând eroarea ΔI înspre ţintă,

$$i_1 = i + \Delta I,$$

formula (2) devine

$$T \leq \frac{V L \sin(i+\Delta I)}{2V\sin\frac{\Delta I}{2}\left[v\cos\frac{\Delta I}{2} - V\cos\left(i+\frac{\Delta I}{2}\right)\right]}.$$

NOTE MATEMATICE

27. — *Sur la résolution du système diophantien*

$$\begin{cases} x+y+z=u^3 \\ x^3+y^3+z^3=v^3. \end{cases}$$

La 2-e équation est satisfaite si nous posons

$$\begin{cases} x=f(f^2+g^2-3h^2) \\ y=g(f^2+g^2-3h^2) \\ z=h(3f^2+3g^2-h^2) \\ v=f^2+g^2+h^2. \end{cases}$$

La première équation nous donne la relation suivante:

$$f^3+f^2(g+3h)+f(g^2-3h^2)+$$
$$g^3+3g^2h-3gh^2-h^3=u^3.$$

En posant $u=f+k$, il reste un équation de la forme $\alpha f^2+\beta f+\gamma=0$, dans laquelle α, β et γ sont des fonctions données de g et de h. On obtient facilement des solutions numériques en annulant α, c'est-à-dire, $g+3h-3k$, d'où $g=3(k-h)$,

$$f=\frac{3gh^2+h^3-g^3-3g^2h+k^3}{g^2-3h^2-3k^2}.$$

On a donc une solution en fonction de deux paramètres indépendants, h et k. Voici l'expression de f en fonction de h et k:

$$f=\frac{-4h^3-qh^2k+27hk^2-13k^3}{3(h^2-3hk+k^2)}.$$

Si f est égale à la fraction irréductible $\frac{m}{n}$, en multipliant les valeurs données par les formules pour x, y, z par n^3, celle de u par n et celle de v par n^2 on aura une solution entière.

Exemples numériques:

k	h	g	f
2	1	3	6
3	2	3	$\frac{1}{3}$
4	3	3	$-\frac{32}{33}$

$$\begin{cases} 252+126+134=8^3 \\ 252^2+126^2+134^2=46^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-26)+(-234)+1260=10^3 \\ (-26)^2+(-234)^2+1260^2=118^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 594.496+(-1.839.222)+2.244.726=100^3 \\ 594.496^2+(-1.839.222)^2+2.244.726^2=20.626^3. \end{cases}$$

A. GLODEN

28. — *Asupra unei probleme a Domnului Profesor D. Pompeiu.*

În N-rul 10, pag. 118 al acestei reviste, D-l Prof. *N. Abramescu* a dat o soluție elementară unei probleme a D-lui Prof. *D. Pompeiu*, iar în N-rul 11, pag. 132—133 mai sunt date și alte soluții.

Iată încă câteva soluții. I. Considerăm figura dela pag. 118 și să ducem diagonala B_3A_2, care întâlnește pe A_1B_1 în C_1. Evident A_1C_1 este egală cu latura patratului, iar triunghiurile OC_1B_3, OCB_2 sunt asemenea, căci au unghiurile din C_1 și C drepte și laturile, care cuprind aceste unghiuri, sunt proporționale, având

$$\frac{C_1B_3}{OC_1}=\frac{CB_2}{OC}=2$$

și deci

$$\sphericalangle B_3OC_1=COB_2,$$

sau încă

$$\sphericalangle B_3OA_3+45^0=\sphericalangle B_1OB_2+45^0,$$

de unde

$$\sphericalangle B_3OA_3=\sphericalangle B_1OB_2.$$

II. Patrulaterul OCB_3C_1 este inscriptibil, căci

$$\sphericalangle OCB_3=\sphericalangle B_3C_1O=90^0.$$

Așa fiind, avem:

(1) $$\sphericalangle OC_1C=\sphericalangle OB_3C=\sphericalangle B_3OA_3,$$

ultimele două egale, ca alterne-interne.

Să mai ducem și diagonala A_1B_2, care evident este paralelă cu OB_1 și deci

(2) $$\sphericalangle B_1OB_2=\sphericalangle OB_2A_1.$$

Dar triunghiurile COC_1, OA_1B_2 sunt egale, având un unghiu egal, $\sphericalangle COC_1 = \sphericalangle OA_1B_2 = 135^0$ şi laturile care-l cuprind egale, $OC = OA_1$, $OC_1 = A_1B_2$.

Prin urmare, rezultă

(3) $$\sphericalangle OB_2A_1 = \sphericalangle OC_1C.$$

Din (1), (2) şi (3) deducem

$$\sphericalangle B_1OB_2 = \sphericalangle B_3OA_3.$$

III. *O soluţie trigonometrică.* Domnul Prof. *V. Alaci* la pag. 133 dă şi o soluţie trigonometrică problemei. Iată încă una; triunghiurile OB_1B_2, OB_2B_3 sunt echivalente, căci au bazele egale şi aceiaş înălţime. Deci avem

$$OB_1 \cdot OB_2 \sin \widehat{B_1OB_2} = B_2B_3 \cdot OB_3 \sin \widehat{B_2B_3O},$$

sau dacă notăm cu a latura patratului (1), devine

$$a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5} \sin \widehat{B_1OB_2} = a \cdot a\sqrt{10} \sin \widehat{B_2B_3O}$$

şi deci

$$\sin \widehat{B_1OB_2} = \sin \widehat{B_2B_3O} = \sin \widehat{B_3OA_3},$$

căci $\widehat{B_2B_3O} = \widehat{B_3OA_3}$ ca alterne-interne.

Cele două unghiuri ascuţite având acelaş sinus, sunt egale

$$\sphericalangle B_1OB_2 = \sphericalangle B_3OA_3.$$

IV. Domnul Prof. *D. V. Ionescu* dă la pag. 132 o soluţie, care conduce la o generalizare a problemei, pentru paralelograme identice lipite.

Să punem şi problema reciprocă. Dacă se consideră trei paralelograme identice lipite, OA_1B_1C, $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, în ce caz unghiurile $\sphericalangle B_1OB_2$, $\sphericalangle B_3OA_3$ sunt egale?

Să notăm $OA_1 = a$, $OC = b$ — figura cu aceleaşi notaţii ca la pag. 118, numai că luăm paralelograme identice. Să presupunem problema rezolvată, adică $\sphericalangle B_1OB_2 = \sphericalangle B_3OA_3$, atunci fiindcă triunghiurile OB_1B_2, OB_2B_3 sunt echivalente, avem

(1) $$OB_1 \cdot OB_2 = B_2B_3 \cdot OB_3.$$

Fie $B_1E_1 = i$, înălţimea paralelogramului OA_1B_1C şi $\alpha = A_1E_1$, proecţia lui A_1B_1 pe OA_1. Din triunghiuri dreptunghice — care se observă uşor — deducem succesiv

$$\begin{cases} OB_1 = \sqrt{(a+\alpha)^2 + i^2} = \sqrt{a^2 + 2a\alpha + b^2}, \\ OB_2 = \sqrt{4a^2 + 4a\alpha + b^2}. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} B_2B_3 = a \\ OB_3 = \sqrt{9a^2 + 6a\alpha + b^2}. \end{cases}$$

Înlocuind aceste valori în (1) şi raţionalizând, obţinem ecuaţia de gradul al II-lea în α,

(3) $$8a^2\alpha^2 + 6a\alpha(a^2 + b^2) - 5a^4 + 4a^2b^2 + b^4 = 0$$

care rezolvată ne dă,

$$\alpha = \frac{-3a(a^2 + b^2) \pm \sqrt{(7a^3 - ab^2)^2}}{8a^2}$$

deci

(4) $$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{2a},$$

iar cealaltă rădăcină nu corespunde, căci dă $OB_2 = \sqrt{-a^2}$.

Înlocuind valoarea lui $2a\alpha$ din (4) în prima relaţie din (2), primim,

$$OB_1 = a\sqrt{2},$$

sau

(5) $$OB_1^2 = 2OA_1^2.$$

Şi astfel am regăsit condiţia indicată de D-l Prof. *D. V. Ionescu*, pentru generalizarea problemei, la paralelograme identice.

ST. MUSTA

---

29. — *Asupra problemei 1817.*

În No. 10 al R. M. T. a. c. a fost dată soluţia problemei: *Să se găsească un număr de forma a a b b din care scăzând 2 să obţinem un patrat perfect.* Voi da o altă soluţie.

Rădăcina patrată a numărului $a\,a\,b\,b - 2$ va fi un număr de două cifre $x\,y$. Ecuaţia problemei este

$$(10x + y)^2 = a\,a\,b\,b - 2 = 1100a + 11b - 2,$$

sau

$$99x^2 + 22xy + (x - y)^2 + 2 = 11(100a + b),$$

de unde rezultă

$$(x - y)^2 + 2 = 0, \quad \text{sau} \quad (x - y)^2 + 2 = \text{mult. } 11.$$

Cazul intâiu este imposibil, căci nu se poate ca două numere pozitive să aibe suma zero. În al doilea caz avem $(x-y)^2 = \text{mult } 11 - 2$ şi diferenţa

$x-y$ poate fi cel mult 9. Luând pentru mult $11+2$ valorile posibile, găsim

$$(x-y)^2 = 9,\ 19,\ 31,\ 42,\ 53,\ 64,\ 75.$$

Reţinem numai numerele patrate perfecte 9 şi 64. Avem

$$x-y = \pm 3, \qquad x-y = \pm 8.$$

Se deduce că singura soluţie acceptabilă este $58^2 = 3366 - 2 = 3364$.

IONEL I. STAMATE

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, Anul XLVIII, No 5, Ianuarie 1943. Calculul vectorial (urmare), de Dr. Ing. *Plauţius Andronescu*. Câteva aplicaţiuni ale coordonatelor isotrope (urmare şi sfârşit), de *Şerban Gheorghiu*. Raportul comisiunii pentru acordarea premiului *„Nicolae G. Botea"*, de Ing *E. Botea*, Prof. *C-tin Ionescu-Bujor*. Ing. *Gabriela Ţiţeica*. Note matematice, probleme rezolvate şi propuse.

2. *Th. Angheluţă. Curs de Algebră Superioară.* (Vol. I).

Este un volum tipărit în foarte bune condiţii tehnice, ce conţine mai mult de 350 de probleme, care ilustrează următoarele capitole: *Polinoame întregi şi fracţii raţionale de o variabilă. Combinări. Polinoame. Determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare. Forme liniare. Forme patratice. Numere iraţionale. Numere complexe. Rezolvirea ecuaţiilor de gradul al treilea şi al patrulea. Limite. Serii. Fracţii continue.*

Din bogatul cuprins, de o claritate şi rigoare clasica, din care se pot desprinde şi sugestii de noui cercetări, reiasă cu prisosinţă importanţa acestei minunate cărţi didactice — *dar* nepreţuit pentru şcoala şi ştiinţa românească.

D-l Prof. *Angheluţă*, cunoscut în lumea matematică din ţară şi străinătate prin numeroasele şi profundele sale cercetări deschizătoare de noui orizonturi în domeniul, *ecuaţiilor integrale, al ecuaţiilor funcţionale, al seriilor trigonometrice, al teoriei ecuaţiilor algebrice*, precum şi indiferite alte ramuri ale *Analizei matematice*, s-a desprins, credem cu greu, din cercetările sale originale pentru a pune la dispoziţia studenţilor şi profesorilor de matematici *„Cursul de Algebră Superioară"*.

Pentru aceasta, şcoala şi ştiinţa românească îi vor rămânea vecinic recunoscători

Amintim încă şi următoarele cărţi didactice ale D-lui Profesor Angheluţă, 1°. *Exerciţii şi probleme de Analiză, Teoria Funcţiilor şi Mecanică raţională*, 2°. *Curs de Algebră Superioară (Funcţii Analitice)*, — atât de folositoare studenţilor şi profesorilor de matematice. Toate aceste cărţi didactice, sunt izvorite din dragostea D-sale nepărmurită pentru şcoala şi ştiinţa românească.

Invităm stăruitor pe corespodenţii noştrii să-şi procure din timp *„Cursul de Algebră Superioară"* al D-lui Prof. *Th. Angheluţă*, convins de marile servicii ce le vor aduce.

A se adresa „Facultăţii de Ştiinţe" din Cluj, vremelnic la Timişoara în curând va apare Vol. II.

3. *Em. Arghiriade.* Geometria axială diferenţială a curbelor strâmbe, (Teză).

4. *Giorgio Galbura.* Sopra una certa equazione funzionale.

5. *Giorgio Galbura.* Sul gruppo caratteristico di una corrispondenza tra varieta algebriche.

PROBLEME REZOLVATE

Problema 1018 — *Fie* D *piciorul bisectoarei interioare din* A *în triunghiul* A B C; B_1 *proecţia lui* B *pe* A D; A_1 *proecţia lui* A *pe* B C *şi* D_1 *proecţia lui* D *pe* A C. *Să se demonstreze că punctele* A_1, B_1, D_1 *sunt coliniare*

S-LT. A. I. STAN

Soluţia I. Fie E intersecţia lui $B B_1$ cu $D D_1$. Triunghiurile dreptunghice $B B_1 A$, $D D_1 A$ având unghiurile din A egale, dau

$$\sphericalangle A B B_1 = \sphericalangle A B E = \sphericalangle A D D_1 = \sphericalangle A D E.$$

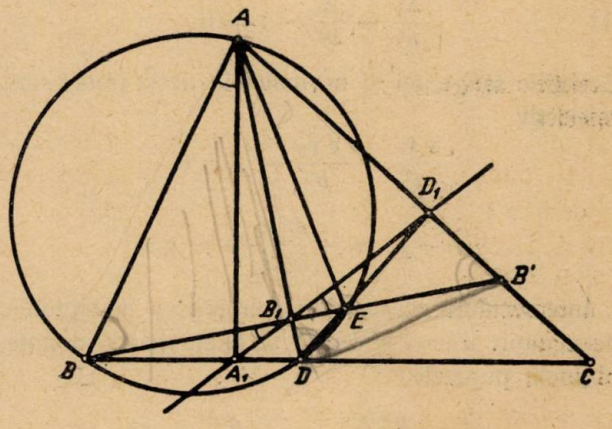
Deci patrulateruf A E D B este înscriptibil şi observând că A_1, B_1, D_1 sunt proiecţiile lui A, de pe cercul A D E, pe laturile triunghiului A D E, deducem că A_1, B_1, D_1 sunt pe dreapta lui *Simson* a acestui triunghiu.

Această soluţie a fost dată de D-l *C. Ionescu-Bujor.*

Soluţia II. Fie B′ intersecţia lui $B B_1$ cu A C. Din patrulaterele inscriptibile $B A_1 B_1 A$ şi $D B_1 D_1 B'$ se deduce

$$(1) \qquad \sphericalangle A_1 B B = \sphericalangle A_1 A B,$$

$$(2) \qquad \sphericalangle D_1 B_1 B' = \sphericalangle D_1 D B'.$$



Dar $\sphericalangle D_1 D B'$ este suplimentar lui $\sphericalangle D B' D_1$, care este egal cu $\sphericalangle D B A$, deci

$$\sphericalangle D_1 B_1 B' = \sphericalangle A_1 A B$$

şi comparând cu (1), rezultă

$$\sphericalangle A_1 B_1 B = \sphericalangle D_1 B_1 B',$$

care arată că A_1, B_1, D_1 sunt colineare.

1°. Au dat soluții analoage cu aceasta D-nii: *Coșniță C., Gal T., Ionescu-Bujor C., Ștefănescu Anibal* și *Süli M.*

2°. S-au primit bune soluții cu ajutorul transversalelor de la D-nii: *Boeriu Val., Coandă I Virgil. Cristescu I., Grigorescu Decebal, Ivănescu C., Margulius M., Motoc D. M., Negrea A. M., Parepeanu I., Pop N. I., Pop I. Leontin, Predoiu Fl., Purcel At., Roșca St. G., Stoica D.* și *Zamfir D.*

3°. Bună soluție trigonometrică de la D-l *Margulius M.*

4°. Dacă D' este piciorul bisectoarei exterioare AD', B_1' proecția lui B pe AD', iar D_1' proecția lui D' pe AC, atunci se demonstrează la fel că A_1, B_1', D_1' sunt colineare.

G-l Gh B.

Problema 1605 — *Tangenta la o iperbolă într'un punct* M *al ei, întâlnește asimptotele în punctele* A *și* B, *iar normala în* M *întâlnește axele în* C *și* D. *Să se arate că punctele* A, B, C, D *sunt pe un cerc, care are ca diametru pe* CD. *Să se arate că raportul dintre* AB *și* CD *este constant când* M *descrie iperbola. Dacă iperbola este echilateră, atunci figura* $ABCD$ *este un pătrat.*

D. V. Ionescu

Soluție. Fie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ecuația iperbolei și $M(x_0, y_0)$ punctul considerat, adică

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Ecuațiile tangentei și normalei în acest punct sunt respectiv

$$\frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} - 1 = 0,$$

$$y - y_0 = -\frac{a^2\,y_0}{b^2\,x_0}(x - x_0).$$

Intersectând aceste două drepte cu asimptotele de ecuații: $a\,y = \pm\, b\,x$ și cu axele de coordonate, obținem punctele

$$A\left(\frac{a^2\,b}{b\,x_0 - a\,y_0}, \frac{a\,b^2}{b\,x_0 - a\,y_0}\right),$$

$$B\left(\frac{a^2\,b}{b\,x_0 + a\,y_0}, -\frac{a\,b^2}{b\,x_0 + a\,y_0}\right),$$

$$C\left(\frac{x_0(a^2+b^2)}{a^2}, 0\right), \quad D\left(0, \frac{y_0(a^2+b^2)}{b^2}\right).$$

Pentru a arăta că aceste patru puncte sunt situate pe un cerc având pe CD ca diametru, este destul a arăta că dreptele AC, AD și BC, BD sunt perpendiculare. Aceasta revine la a arăta că produsul coeficienților unghiulari este egal cu -1. Pentru primele două drepte, acest produs este

$$\frac{\dfrac{a\,b^2}{b\,x_0 - a\,y_0}}{\dfrac{a^2\,b}{b\,x_0 - a\,y_0} - \dfrac{x_0(a^2+b^2)}{a^2}} \cdot \frac{\dfrac{a\,b^2}{b\,x_0 - a\,y_0} - \dfrac{y_0(a^2+b^2)}{b^2}}{\dfrac{a^2\,b}{b\,x_0 - a\,y_0}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{a\,b^4 - y_0(a^2+b^2)(b\,x_0 - a\,y_0)}{a^4\,b - x_0(a^2+b^2)(b\,x_0 - a\,y_0)}.$$

Numitorul, în care înlocuim pe x_0^2 scos din (1), se mai poate scrie

$$a^4\,b - \frac{a^2}{b}(a^2+b^2)(y_0^2+b^2) + a\,x_0\,y_0(a^2+b^2)$$

$$= \frac{a}{b}[-a\,b^2 + y_0(a^2+b^2)(b\,x_0 - a\,y_0)],$$

adică fracția considerată este egală cu -1.

La fel se arată pentru dreptele BC, BD.

Pentru a arăta că raportul $\dfrac{AB}{CD}$ este constant, vom calcula mai întâi pe AB și CD. Ținând seama de (1), avem

$$\overline{AB}^2 = \left(\frac{a^2\,b}{b\,x_0 - a\,y_0} - \frac{a^2\,b}{b\,x_0 + a\,y_0}\right)^2 + \left(\frac{a\,b^2}{b\,x_0 - a\,y_0} + \frac{a\,b^2}{b\,x_0 + a\,y_0}\right)^2$$

$$= \frac{4\,a^6\,b^2\,y_0^2 + 4\,a^2\,b^6\,x_0^2}{(b^2\,y_0^2 - a^2\,y_0^2)^2} = 4\,a^2\,b^2\left(\frac{y_0^2}{b^4} + \frac{x_0^2}{a^4}\right),$$

$$\overline{CD}^2 = \frac{x_0^2(a^2+b^2)^2}{a^4} + \frac{y_0^2(a^2+b^2)^2}{b^4} =$$

$$(a^2+b^2)^2\left(\frac{y_0^2}{b^4} + \frac{x_0^2}{a^4}\right),$$

încât

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{4\,a^2\,b^2}{(a^2+b^2)^2},$$

valoare independentă x_0 și y_0. Proprietatea din enunț este deci demonstrată

Să presupunem acum că iperbola este echilateră, adică $a = b$. Atunci coordonatele punctelor calculate mai sus, devin

$$A\left(\frac{a^2}{x_0-y_0}, \frac{a^2}{x_0-y_0}\right), B\left(\frac{a^2}{x_0+y_0}, -\frac{a^2}{x_0-y_0}\right),$$

$$C(2x_0, 0), \quad D(0, 2y_0).$$

Coordonatele ultimelor două puncte ne spun imediat că M este la mijlocul lui CD. Aceiaşi proprietate avem şi pentru segmentul AB, deoarece

$$\frac{a^2}{x_0-y_0}+\frac{a^2}{x_0+y_0}=\frac{2a^2x_0}{x_0^2-y_0^2}=2x_0,$$

$$\frac{a^2}{x_0-y_0}+\frac{a^2}{x_0+y_0}=\frac{2a^2y_0}{x_0^2-y_0^2}=2y_0,$$

în baza relaţiei (1), care acum devine: $x_0^2-y_0^2=a^2$. Calculul făcut mai sus, ne spune că în cazul iperbolei echilatere, AB = CD. Patrulaterul ABCD este deci un pătrat având diagonalele egale, perpendiculare şi tăindu-se în părţi egale.

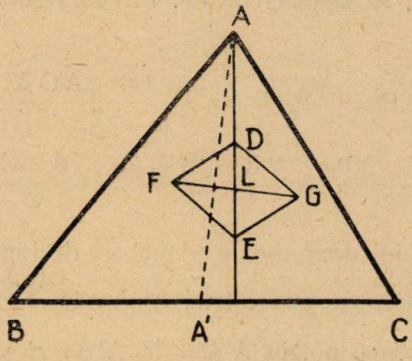
Soluţii date de D-nii: *Andrunachievici Al. Vl.* (student, Cluj), *Matei I. Aug.* (student, Cluj), *Ripianu A.* (lic. Matemateci), *Stamate I. I.* (student), şi Sub-Lt *Ştefănescu F. Marin* (Alba-Iulia).

Gh. T. Gh.

Problema 1701. — *Pe înălţimea din* A *a triunghiului* ABC *se iau punctele* D *şi* E. *Perpendicularele duse din aceste două puncte pe laturile* AB *şi* AC *formează un paralelogram, având segmentul* DE *ca diagonală. Să se arate că a doua diagonală a acestui paralelogram este perpendiculară pe mediana triunghiului care pleacă din* A.

VASILE VASU

I. *Soluţie geometrică.* A doua diagonală FG a paralelogramului DFEG taie prima diagonală DE în mijlocul L al lor, astfel că FL este mediana triunghiului DFE.



Triunghiurile DFE şi CAB au laturile perpendiculare, sunt asemenea, deci au şi dreptele corespunzătoare perpendiculare. Aşa dar mediana FLG este perpendiculară pe mediana AA' corespunzătoare a triunghiului ABC.

Au dat soluţii D-nii: *Buznea Dorin, Cristea Nicolae, Dăscălescu Hristache, Modâlcă Emil, Şerban Constantin,* Sub-Lt *Ştefănescu Marin, Tilică Ştefan, Venter Dumitru.*

II. *Soluţia analitică.* Luăm BC ca axă O*x* şi înălţimea din A ca O*y*.

Să însemnăm coordonatele punctelor date A(0, *a*), B(*b*, 0), C(*c*, 0), D(0, *d*, E(0, *e*).

Ecuaţiile perpendicularelor din D şi E pe AB; din D şi E pe AC, sunt

$$(1)\quad y-d=\frac{c}{a}x, \qquad (2)\quad y-e=\frac{c}{a}x,$$

$$(3)\quad y-d=\frac{b}{a}x, \qquad (4)\quad y-e=\frac{b}{a}x.$$

Rezolvând ecuaţiile (1), (4) şi (2), (3), avem coordonatele punctelor F şi G

$$F\left[\frac{a(e-d)}{c-b}, \frac{ce-bd}{c-b}\right], \quad G\left[-\frac{a(e-d)}{c-b}, \frac{cd-be}{c-b}\right].$$

Coeficientul unghiular al dreptei FG este raportul dintre diferenţa ordonatelor şi diferenţa absciselor, $\frac{(b+c)}{2a}$. Acela al medianei AA', care uneşte vârful A(0, *a*) cu mijlocul $A'\left(\frac{b+c}{2}, 0\right)$ al laturii BC, este $-\frac{2a}{b+c}$, de unde rezultă că dreapta FG este perpendiculară pe mediana AA' corespunzătoare vârfului A.

Au dat soluţii D-nii: *Borneas Marius, Jidanu Constantin, Mureşan Octavian, Segal Joe, Tilică Ştefan* şi *Segal Zigu.*

N. A.

Problema 1710. — *Se dă un patrulater* ABCD. *Prin vârfurile* A *şi* C *se duc două drepte paralele cu diagonala* BD; *iar din* D *şi* B *două paralele oarecare, ce taie pe celelalte două în punctele* E, F, G *şi* H. *Se uneşte* F *cu* H. 1°. *Să se arate că, aria triunghiului* EFH *este egală cu aria patrulaterului* ABCD. 2°. *Să se arate că între diagonalele paralelogramului* EFGH *şi diagonala* AC *a patrulaterului dat există relaţia*

$$\overline{AC}^2 \sin^2\theta'' = HF \cdot EG \sin\theta' \sin\theta,$$

unde θ este unghiul lui E G *cu* D B, *θ' unghiul lui* H F *şi* D B, *iar θ'' unghiul lui* A C *şi* D B.

MIHAIL BOTEZ

1°. aria A B C D = aria A B D + aria B C D =

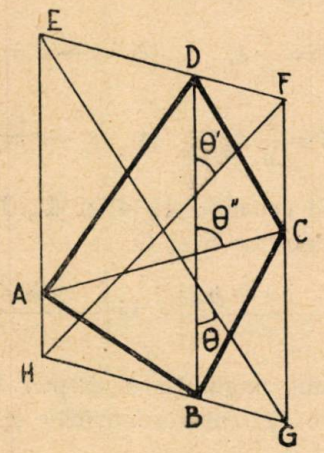
$\frac{1}{2}$ aria E H B D + $\frac{1}{2}$ aria D B G F =

$\frac{1}{2}$ aria E H G F = aria E H F.

2°. 2 aria E G F = G E . G F sin θ = G E . B D sin θ,

2 aria F H G = H F . G F sin θ' = H F . B D sin θ',

2 aria A B C D = A C . B D sin θ''.



Am văzut că aria A B C D = aria E H F. Dar aria E H F = aria E G F, căci vârfurile H şi G sunt pe o paralelă la E F. Deci

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} A C . B D \sin\theta'' &= G E . B D \sin\theta, \\ A C \sin\theta'' &= G E \sin\theta. \end{aligned}$$

De asemenea, aria A B C D = aria E H F = aria F H G, ca jumătăţi ale paralelogramului E H G F. Deci

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} A C . B D \sin\theta'' &= H F . B D \sin\theta', \\ A C \sin\theta'' &= H F \sin\theta'. \end{aligned}$$

Înmulţind relaţiile (1) şi (2), obţinem relaţia cerută

$$\overline{AC}^2 \sin^2\theta'' = H F . G E \sin\theta \sin\theta'.$$

Altă soluţie. 1°. Fie A_1, C_1 proiecţiile lui A, C pe B D. Avem

aria A B D = $\frac{1}{2}$ B D . A A_1, aria B C D = $\frac{1}{2}$ B D . C_1 C,

aria A B C D = aria A B D + aria B C D =

$\frac{1}{2}$ (A A_1 + C C_1) B D = $\frac{1}{2}$ aria E H G F = aria E H F.

2° d = A A_1 + C_1 C, A C sin $\theta'' = d$, E G sin $\theta = d$, H F sin $\theta' = d$,

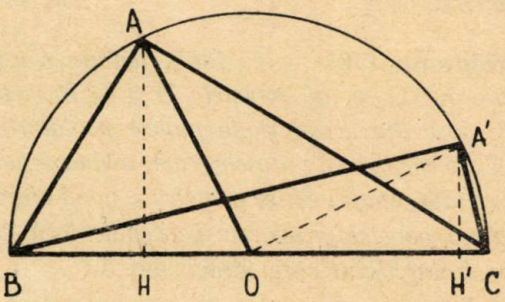
$$\overline{AC}^2 \sin^2\theta'' = d^2 = E G . H F \sin\theta \sin\theta'.$$

Au dat soluţii D-nii: *Aniţescu Nicolae, Dăscălescu Hristache, Diaconescu Ion, Jidanu Constantin, Minia Aldea, Modâlcă Emil, Şerban Constantin, Sub-Lt Ştefănescu Marin, Tilică Ştefan, Stamate Ionel, Teodorescu Dorin, Segal Zigu.* N. A.

Problema 1773. — *Se dă un triunghiu dreptunghic* A B C *în care* B > C. *Un alt triunghiu dreptunghic are aceiaşi ipotenuză* B C *şi unghiul ascuţit* $\frac{B-C}{2}$. *Se cere cateta opusă acestui unghiu* $\frac{B-C}{2}$ *în funcţie de laturile triunghiului* A B C. *Soluţie trigonometrică şi geometrică.*

SUB-LT MARIN ŞTEFANESCU

Soluţie geometrică. Înscrim triunghiul dreptunghic A B C în semicercul (O), (fig.)



Al 2-lea triunghiu dreptunghic având ipotenuza B C şi un unghiu ascuţit $\frac{B-C}{2}$ îl construim astfel: În O, pe mediana A O a triunghiului dreptunghic A B C, ridicăm o perpendiculară, care întâlneşte în A' semicercul (O). Privind figura, avem succesiv

$$\sphericalangle A'BC = \frac{\overset{\frown}{A'OC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AOC} - \overset{\frown}{AOA'}}{2} =$$

$$\frac{2B - 90^\circ}{2} = \frac{2B - (B+C)}{2} = \frac{B-C}{2}.$$

Triunghiul dreptunghic A' B C are deci ipotenuza B C şi unghiul opus catetei A' C este $\frac{B-C}{2}$.

Acum, dacă notăm A' C = b', A' B = c' şi ducem înălţimile A H şi A' H' ale celor două triunghiuri dreptunghice A B C, A' B C, pe de o parte avem

(1) $$b'^2 + c'^2 = a^2,$$

iar pe de altă parte, din figură, putem scri

$$b'^2 = a \times H'C = a \cdot \left(\frac{a}{2} - OH'\right),$$

$$c'^2 = a \times BH' = a\left(\frac{a}{2} + OH'\right),$$

deci

(2) $$c'^2 - b'^2 = 2a \times OH'.$$

Dar din triunghiurile dreptunghice egale $H'OA'$, HOA (fiindcă au $OA = OA'$ şi $\sphericalangle A'OH' = \sphericalangle OAH$ ca având laturile respectiv perpendiculare), rezultă

$$OH' = AH = \frac{bc}{a}$$

(fiindcă $AH \cdot a = b \cdot c =$ dublul ariei $\sphericalangle ABC$).

Astfel, relaţia (2) devine

(3) $$c'^2 - b'^2 = 2bc.$$

Scăzând relaţia (3) din (2) şi ţinând seamă că $a^2 = b^2 + c^2$, avem

$$b'^2 = \frac{a^2 - 2bc}{2} = \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{2} = \frac{(c-b)^2}{2},$$

deci

$$b' = \frac{c-b}{\sqrt{2}}.$$

Avem astfel calculată cateta cerută $A'C = b'$, în funcţie de laturile triunghiului dreptunghic ABC.

Observare. Prin adunarea relaţiilor (1) şi (3), găsim încă

$$A'B = c' = \frac{b+c}{\sqrt{2}}.$$

Soluţie trigonometrică. În triunghiul dreptunghic $A'BC$ construit ca în soluţia precedentă, putem scri succesiv

$$A'C = BC \sin A'BC = a \sin \frac{B-C}{2} = a \sin \frac{2B-(B+C)}{2}$$

$$= a \sin \frac{2B - 90^0}{2} = a \sin (B - 45^0),$$

sau

$$b' = (\sin B \cos 45^0 - \cos B \sin 45^0) =$$

$$\frac{a \sin B - a \cos B}{\sqrt{2}} = \frac{b-c}{\sqrt{2}}.$$

Acelaşi rezultat ca în prima soluţie.

Soluţie analoagă dată de d-l *Modâlcă S Emil* (T.-Severin).

Alte soluţii date de d-nii: *Bakonyi C. C.* (Polit., Timişoara), *Cazanacli V. Petre* (Ismail), *Goga Florian* (Timişoara), *Luca I. Ion* (Polit., Timişoara), *Mărgărit Nicolae, Popescu N. Corneliu* (a dat trei interesante soluţii trigonometrice), *Şimon S. Petru* (Lic., Arad), *Vijelie Gh. Eugen* (Colegiul Militar, N. Filipescu) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

Problema 1985 [1]. — *Notaţiile fiind cele obicinuite, să se stabilească identitatea:*

$$\left(\sum \frac{r_a^2}{a r_a + pr}\right)^2 - \sum \left(\frac{r_b^2}{b r_b + pr}\right)^2 = 2 \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

FLORIAN I. GOGA

Soluţie şi rectificare de D-l Enăchescu Gr. Ion (Lic. Milit., Timişoara).

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute,

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \qquad r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

putem scri

$$\frac{r_a^2}{a r_a + pr} = \frac{p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{ap \operatorname{tg} \frac{A}{2} + p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

astfel că primul membru al identităţii, notat cu E, se poate scri succesiv

$$E = \left(\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^2 - \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}$$

$$+ 2 \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} - \sum \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = 2 \sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Problema 1992. — *Să se stabilească relaţiile.*

$$\frac{8}{\alpha \beta \gamma} = \sec \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} \prod \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

$$\frac{8}{\alpha' \beta' \gamma'} = \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \operatorname{cosec} \frac{B}{2} \operatorname{cosec} \frac{C}{2} \prod \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right),$$

în care α, β, γ şi α', β', γ' sunt respectiv bisectoarele interioare şi exterioare, iar celelalte sunt notaţiile cunoscute într'un triunghiu oarecare.

HR. ST. DASCALESCU

Soluţie. Se cunosc formulele

(1) $$\alpha = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}, \qquad \alpha' = \frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{c-b}$$

[1]) Enunţ rectificat.

şi analoagele lor (Compléments de Trigonométrie, par F. G. M., pp. 195, 196).

Relaţiile (1) se mai pot pune sub forma

$$\frac{2}{\alpha}=\sec\frac{A}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\quad \frac{2}{\alpha'}=\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right).$$

Analog avem

$$\frac{2}{\beta}=\sec\frac{B}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right),\quad \frac{2}{\beta'}=\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{2}{\gamma}=\sec\frac{C}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),\quad \frac{2}{\gamma'}=\operatorname{cosec}\frac{C}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right).$$

Inmulţind între ele relaţiile ce conţin α, β, γ, precum şi pe acelea ce conţin α', β', γ', obţinem respectiv:

$$\frac{8}{\alpha\beta\gamma}=\sec\frac{A}{2}\operatorname{ses}\frac{B}{2}\sec\frac{C}{1}\prod\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

$$\frac{8}{\alpha'\beta'\gamma'}=\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right).$$

Soluţii date de d-nii: *Enăchescu Gr. Ion* (Lic. Milit.' Timişoara), *Dr. A. Gloden* (Luxemburg), *Ionescu F. Petre* (Colegiul „Carol I", Craiova), *Luca I. Ioan* (Polit., Timişoara), *Mahrenholz Johannes* (Cottbus), *Preda I. D-tru* (Lic. Slatina) şi *Wegener Eugen* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

2106. — Se cere un număr pe patru cifre astfel ca suma cifrelor sale să fie 27, iar numărul cetit dela dreapta la stânga să fie un număr cu 999 mai mic. C. BAKONYI

2107. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{ab+b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{ac+c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)}+$$
$$\frac{ad+d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}=\frac{2a^2}{(b-a)(c-a)(d-a)}.$$

S-LT M GRUMAZESCU

2108. — Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}\Sigma\,(z-y)x^2=2\\ \Sigma\dfrac{y-z}{1+yz}=\dfrac{1}{42}\\ \Sigma x^2-\Sigma xy=3.\end{cases}$$

POPESCU I. ADRIAN

2109. — Să se stabilească relaţia

$$\frac{1}{2}C_n^1+\frac{2}{3}C_n^2+\frac{3}{4}C_n^3+\cdots+\frac{n}{n+1}C_n^n=\frac{1+(n-1)2^n}{n+1},$$

unde C_n^p, inseamnă combinări a n obiecte luate câte p. ION RIZESCU

2110. — Se dă un cerc O şi diametrul AB. În jumătatea de cerc situată deasupra lui AB se înscrie un patrat CDEF, cu vârfurile C şi D pe AB. Diagonalele EC şi FD ale patratului, întâlnesc a 2-a oară cercul, respectiv, în punctele M şi N. Dacă P este centrul patratului, să se demonstreze că aria triunghiului PMN este egală cu aceea a patratului CDEF. H. KNOPF

2111. — Se consideră două drepte D_1 şi D_2 şi un triunghiu ABC cu vârful A pe D_1 şi vârfurile B, C pe D_2. Dintr'un punct oarecare M luat pe D_2, se duc paralele la laturile triunghiului, care întâlnesc pe D_1 în B' şi C'.

1°. Se cere locul geometric al punctului I de intersecţie al dreptelor BC' şi B'C, când M se deplasează pe D_2.

2°. Presupunând pe M fixat, se cere locul lui I când D_1 se roteşte în jurul punctului A.

3°. Cum trebue ales M în cazul 2°, astfel ca locurile de la 1° şi 2° să se confunde.

I. LOZICIU-VARSET

2112. — Fie $R>R'$ razele a două cercuri de centre O, O' şi α, β unghiurile pe care le face OO' cu tangenta comună exterioară şi interioară la cele două cercuri. Să demonstreze că:

1°. $R\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=R'\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

2°. $(R+R')\sqrt{d^2-(R+R')^2}\sin 2\alpha=$
$(R-R')\sqrt{d^2-(R-R')^2}\sin\beta$.

G-L GH. BUICLIU

2113. — Într'un triunghiu ABC avem relaţia,

$$c^3\cos^3 B\sin 3B+h^3\cos 3B=3c^2h\cos B\cos 2B,$$

unde h este înălţimea din A, celelalte notaţii fiind cele obicinuite. V. ALACI

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Algebră.

Pag.

E. Vişa — Asupra unor ecuaţii diofantiene 59
M. Ghermănescu — Ecuaţia A D—B C=1 în întregi 115
O. N. Ţino — Asupra ecuaţiei nedeterminate $xy=z(x+y)+1$ 116
D. Pompeiu — Despre determinanţi 139

b) Geometrie.

O. N. Ţino — Proprietăţi de geometrie având origina în aplicaţiile „Coordonatelor rombice“ 8
D. Pompeiu — O observare asupra patrulaterului convex şi o problemă . 67
N. Abramescu — Asupra unei probleme a d-lui *D Pompeiu* 118

c) Trigonometrie.

V. Alaci — Relaţiuni metrice într'un triunghiu 79

d) Geometrie analitică.

V. Alaci — Un nou sistem de coordonate: „Coordonate rombice“ 1, 19, 31, 43, 55, 68, 81, 91

e) Analiză Matematică.

P. Sergescu — O problemă de aplicaţii geometrice ale Analizei Matematice 24

f) Mecanică.

E. V. Dobrescu — O problemă de Mecanică . . 103
V. Alaci — Asupra articolului: O problemă de Mecanică 106

g) Navigaţie.

C. V. Costăchescu — Câteva contribuţii la problema lansării 127, 140

II. REDACŢIONALE.

* * * — Comitetul de conducere al Revistei Matematice din Timişoara 17, 18

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetică şi Teoria Numerelor.

4.*) A. Gloden — Dans un système de numération de base B, les nombres $(B-1)(B+1)^2$ et $(B-1)^2(B+1)^2$ sont formés des mêmes chiffres écrits dans un ordre inverse 26
6. A. Gloden — Asupra problemei 1859 . . 37
7. A. Gloden — Propriétés de quelques puissances de $\varphi 5$ . . . . . Pag 37
9. A. Gloden — Quelques propriétés du millésime 1941 49
19. Gh. Buicliu — Problema 1280 98
21. M. G. — Asupra proplemei 1322 . . . 108
29. Ionel I. Stamate — Asupra problemei 1817 . . 144

b) Algebră.

1. Gh. Buicliu — Transformarea expresiunei $\sqrt{A+\sqrt{B+\sqrt{C}}}$ . . . . . 10.
10. M. Ghermănescu — Ecuaţia $x^3+y^3+z^3=t\,x\,y\,z$ în întregi 49
11. J. Mahrenholz — Ein diophantisches Problem . 50
12. M. G. — Asupra Notei 10 din numărul precedent 61
13. A. Moessner — Elementarer Beweis der rationalen Unmöglichkeit von $X^4+Y^4=Z^4$ 61
17. A. Moessner — Zur Identität $Q, R, S \overset{n}{=} U, V, W$ für $n=2, 4$ 86
20. Th. Angheluţă — Demonstrarea elementară a unei exprimări a numărului π . . 107
22. V. Alaci — Soluţia generală a ecuaţiei diofantice, $xy=az(x+y)+b$, $(a, b$ întregi) 118
27. A. Gloden — Sur la résulation du système diophantien $x+y+z=u^2$, $x^2+y^2+z^2=v^2$ 143

c) Geometrie.

2. N. Abramescu — Asupra unei proprietăţi geometrice obţinută ca aplicaţie a coordonatelor rombice ale d-lui *V. Alaci* 11
5. P. B. Boldescu — O limită superioară a bisectoarei într'un triunghiu . . 26
14. M. St. Botez — Relaţiuni între diagonalele unui poligon cu laturi progresive 61
15. V. Alaci — O chestiune conexă cu aceea din articolul D-lui Prof. *Pompeiu* 73
16. V. Alaci — Soluţia unei probleme a D-lui Prof. *Pompeiu* 73
18. O. N. Ţino — O proprietate a trapezului isoscel 98
23. E. Şipoş — O nouă demonstraţie a teoremei lui *Stewart* 118
24. Gh. Buicliu — Pe marginea unei probleme . 132
25. D. V. Ionescu — Asupra unei probleme a Domnului Profesor *D. Pompeiu* . 132
28. Şt. Muşta — Asupra unei probleme a Domnului Profesor *D. Pompeiu* . 143

d) Trigonometrie.

26. V. Alaci — O soluţie trigonometrică . . 133

e) Geometrie analitică.

3 C. Borş — Notă asupra transformărilor rombice şi antirombice . . 12

f) Patrate magice.

8. A. Moessner — Magische Quadrate aus Primzahlen 37

*) În această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

IV. BIBLIOGRAFIE.

Pag.

N. Abramescu Nouvelle méthode pour obtenir la cubique qui donne les tangentes de *Darboux* en un point d'une surface 74

N. Abramescu Sur les sections d'une surface par des plans menés par une tangente, ou par une droite passant par un point de la surface 74

N. Abramescu Sur les tangentes de *Darboux* d'une surface 74

N. Abramescu Proprietăţi ale conicelor osculatoare la o curbă plană . . 75

N. Abramescu Asupra deplasării elicoidale . 75

N. Abramescu Asupra relaţiei dintre involuţie şi fascicolele de cercuri . . 75

L. Amerio Sul prolungamento analitico delle funzioni armoniche . . 74

Th. Angheluţă şi P. Sergescu, Comemorarea iluştrilor matematicieni *Emil Picard* şi *Henri Lebesgue* 13

Th. Anghelută Curs de Algebră Superioră . 145

Em. Arghiriade Geometria axială diferenţială a curbelor strâmbe 145

G. Bratu Curs de Astronomie . . . 50

G. Bratu Curs de Analiză Matematică . 87

G. Bratu Cinci conferinţe de Astronomie 120

Buletinul Politechnicei din Bucureşti . . . 38, 133

Bulletin des Sciences Mathématiques 99

C. I. Călniceanu Cotarea desemnelor 50

V. G. Cavallaro Sulla formula che esprime una distanza variabile in funzione di tre distanze assegnate . . 12

V. G. Cavallaro Su la generalizzazione del triangolo delle mediane . . . 13, 87

V. G. Cavallaro Punti di *Feuerbach*. Appunti per un'attraente lezione di trigonometria 87

V. G. Cavallaro Sull'approssimata rapprezentazione di due serie sur un circolo di ragio unitario . . . 87

G. G. Constantinescu Transformations genre *Laplace* 75

G. G. Constantinescu Sur la flexion des pièces droits 75

G. G. Constantinescu Sur le critère de M. *Pompeiu* pour l'intégrabilité par quadratures de l'équation de *Riccati* 75

G. G. Constantinescu Sur les intégrales de certaines classes d'équations différentielles linéaires 75

G. G. Constantinescu Asupra unei teoreme a D-lui *Pompeiu* 75

G. G. Constantinescu Asupra unor curbe 75

G. G. Constantinescu Asupra unor teoreme de Geometrie 75

G. G. Constantinescu Asupra împărţirei polinoamelor 75

I. Curea Determinarea polului ceresc pe cale astrologică 110

I. Curea O eclipsă de soare în anul 1927 110

I. Curea Corecţiuni diferenţiale în pol 110

I. Curea Staţiunea seismică a observatorului din Cluj 110

I. Curea Sur une cas spécial de réfraction différentielle 110

I. Curea Ratachement de deux clichés dont les centres coïncident avec les pôles céleste de deux dates différentes 110

I. Curea Astrographische Bestimmung der Lage des Himmelspoles . . 110

I. Curea Anwendung der Brusschen Methode der Teilungsfehlerbestimmung 110

I. Curea Bulletin Séismique 110

I. Curea Memoriu de titluri şi lucrări 110

Giorgio Galbura Sopra una certa equazione funzionale 145

Giorgio Galbura Sul gruppo caratteristico di una corrispondenza tra varieta algebriche 145

Gazeta Matematică 12, 27, 38, 50, 63, 74, 87, 99, 110, 120, 133, 145

Gazeta Matematică supliment cu exerciţii . . . 12

Gh. Th. Gheorghiu Sur une quadrique attaché a une courbe gauche sur une classe de surface 38

Gh. Th. Gheorghiu Curs de Algebră şi Trigonometrie 50

M. Ghermănescu Memoriu de titluri şi lucrări 13

M. Ghermănescu Equations fonctionnelles linéaires du premier ordre . . 38

M. Ghermănescu Fonctions entières et les fonctions algèbroïdes 99

M. Ghermănescu Mouvements d'une solide autour d'un point fix 133

I. Ionescu Maxime şi minime geometrice 38

A. Maior Zur Mehrfachtelephonie mittels Strömen hoher Frequenz . . 110

A. Maior La gravitation et la variation des quelques „Constantes" fondamentales 110

Mathematica 99

I. G. Murgulescu und C. Drăgulescu, Über die Verwendung der Hexamminkolalt III Salze in der quantitativen Analyse 38, 50

I. G. Murgulescu und Maria Alexa, Die Verwendung der Hexamminkolalt III. Salze in der quantitativen Analyse 50

I. G. Murgulescu und Vasile Alexa, Die Verwendung der Hexamminkolalt III. Salze in der quantitativen Analyse 59

I. G. Murgulescu Memoriu de titluri şi lucrări 99

I. G. Murgulescu Über die Einordnung des Begriffes der Aktivität in die Thermodynamik der Lösungen 99

I. G. Murgulescu und E. Laţiu, Direkte konduktometrische Methoden . . . 133

V. Novacu Contribuţiuni la Mecanica ondulatoare a fotonului . . . 27

Pozitiva 12, 87

P. Sergescu Profesorul † *G. Bratu* . . . 13

P. Sergescu Le proffesseur *G. Bratu* . . 13

P. Sergescu Le proffesseur *D. Emanuel* . 13

P. Sergescu Sur l'identité des auteurs de quelques articles mathématiques insérés dans „le journal des savants" 38

P. Sergescu Un episod din bătălia pentru triumful Calculului diferenţial 63

Solemnitatea deschiderii cursurilor Politechnicei din Bucureşti 38

Ştiinţă şi progres 27

A. Teodosiu Proecţiunea conformă a elipsoidului terestru pe sfera lui *Gauss* 133

L. Toscano Transformata di *Laplace* di prodotti di fonzioni di *Bessel* e polinomi di *Laguerre* . . Pag. 13

V. Vâlcovici Sur certaines intégrales premiédes équations du mouvement des systèmes 133

V. CHESTIUNI DE EXAMEN.

Examenul de admitere în an. I la Şcoala Politehnică din Timişoara 108

VI. ERATA.

— Rectificarea problemei Nr. 2020, pag. 16, an. XXII 30
— Rectificarea problemei Nr. 2070, pag. 90, an XXII 126
— Rectificarea problemei Nr. 2084, pag. 11 , an. XXII 126

VII. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XXI. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
50	110	I	
69	142	„	
110	14	II	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
175	110	„	
178	126	„	
185	126	„	
194	142	„	
206	174	„	
217	185	„	
244	46	III	
268	78	„	
275	94	„	
291	126	„	
317	174	„	
344	30	IV	
345	30	„	
347	46	„	
359	62	„	
376	94	„	
382	110	„	
393	126	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	39
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
450	46	„	
458	62	„	
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
535	30	VI	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
634	54	„	
635	54	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
658	102	„	
686	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	VIII	
794	190	„	
851	96	IX	75
858	108	„	
860	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
908	36	X	
924	60	„	
938	84	„	
939	84	„	
954	108	„	
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	
1001	36	„	
1008	48	„	
1010	48	„	99
1012	48	„	
1018	60	„	145
1027	72	„	120
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	138	„	
1077	138	„	
1085	12	XII	120
1093	24	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1125	72	„	63
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1142	96	„	
1146	108	„	
1149	108	„	
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1160	120	„	
1161	132	XII	
1163	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1173	138	„	
1174	138	„	51
1182	12	XIII	
1183	12	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1195	36	„	27
1198	36	„	
1205	48	„	
1206	48	„	
1212	60	„	
1213	60	„	
1216	60	„	
1218	72	„	
1219	72	„	
1220	72	„	
1223	72	„	
1224	72	„	
1225	84	„	
1228	84	„	
1229	84	„	
1234	96	„	
1236	96	„	
1241	108	„	
1243	108	„	
1245	108	„	
1248	120	„	
1250	120	„	
1253	120	„	
1258	132	„	
1262	132	„	
1268	141	„	
1270	141	„	
1272	12	XIV	
1275	12	„	
1280	24	„	87
1289	36	„	
1295	36	„	
1299	52	„	
1300	52	„	40
1306	64	„	
1307	64	„	
1308	64	„	
1309	64	„	
1311	64	„	
1315	76	„	
1319	76	„	
1322	88	„	88
1323	88	„	
1325	88	„	51

1).	2).	3).	4).
1327	88	XIV	
1331	100	„	
1333	100	„	
1341	112	„	
1349	124	„	
1350	124	„	
1351	124	„	
1354	136	„	
1357	136	„	
1363	148	„	
1364	148	„	
1365	148	„	
1370	12	XV	
1377	24	„	
1378	24	„	
1379	24	„	
1380	24	„	
1385	36	„	
1386	36	„	
1389	36	„	
1390	36	„	
1391	36	„	
1393	48	„	
1395	48	„	
1396	48	„	
1402	60	„	100
1405	60	„	
1407	60	„	88
1413	72	„	
1414	72	„	
1419	84	„	88
1422	84	„	
1423	84	„	
1427	96	„	
1428	96	„	
1430	96	„	
1436	108	„	
1438	108	„	
1442	120	„	
1443	120	„	
1446	120	„	
1447	120	„	
1450	132	„	
1454	132	„	
1460	144	„	
1461	144	„	
1472	28	XVI	
1474	28	„	
1475	28	„	
1478	28	„	
1482	40	„	
1483	40	„	
1485	40	„	
	36	XVIII	

1).	2).	3).	4).
1486	40	XVI	
1489	52	„	110
1490	52	„	
1492	52	„	
1493	52	„	
1494	52	„	
1496	52	„	
1498	64	„	
1501	64	„	
1507	76	„	
1511	76	„	101
1514	88	„	
1516	88	„	
1530	112	„	
1531	112	„	
1532	112	„	
1534	112	„	
1536	112	„	
1542	124	„	
1543	124	„	
1545	124	„	
1547	136	„	
1548	136	„	
1553	136	„	
1554	147	„	
1555	147	„	
1557	148	„	
1558	148	„	
1559	148	„	
1560	148	„	
1563	12	XVII	
1564	12	„	
1566	12	„	
1568	12	„	
1571	24	„	
1574	24	„	133
1575	24	„	
1577	24	„	64
1582	36	„	
1583	36	„	
1588	48	„	
1589	48	„	
1600	60	„	
1604	72	„	
1605	72	„	146
1609	72	„	121
1612	84	„	75
1613	84	„	
1615	84	„	
1618	96	„	
1621	96	„	
1622	96	„	
1624	96	„	
1627	108	„	

1).	2).	3).	4)
1628	108	XVII	
1631	108	„	121
1632	108	„	
1637	120	„	
1640	120	„	
1641	132	„	
1643	132	„	
1645	132	„	
1646	132	„	52
1880	92	XX	
1647	132	XVII	13
1651	144	„	
1652	144	„	
1653	144	„	
1654	144	„	
1656	144	„	
1660	12	XVIII	77
1661	12	„	
1662	12	„	
1664	12	„	113
1665	12	„	77
1667	24	„	
1668	24	„	
1670	24	„	
1671	24	„	
1672	24	„	
1676	36	„	
1678	36	„	
1679	36	„	
1680	36	„	
1685	48	„	
1686	48	„	
1687	48	„	
1688	48	„	13
1689	60	„	14
1691	60	„	14
1693	60	„	
1694	60	„	
1695	60	„	
1697	72	„	
1698	72	„	
1701	72	„	147
1706	84	„	
1708	84	„	
1709	84	„	
1710	84	„	147
1711	84	„	
1714	96	„	
1715	96	„	
1716	96	„	
1717	96	„	
1718	96	„	
1719	96	„	101
1722	108	„	

1).	2).	3).	4).
1723	108	XVIII	
1724	108	„	
1725	108	„	
	120	„	
1726	108	„	
1728	120	„	
1733	120	„	
1737	132	„	
1739	132	„	
1740	132	„	
1741	132	„	
1742	132	„	
1744	149	„	
1747	149	„	
1749	149	„	
1750	149	„	
1754	16	XIX	
1755	16	„	
1756	16	„	
1821	156	„	
1758	16	„	
1759	16	„	
1762	28	„	
1763	28	„	
1764	28	„	
1767	28	„	
1865	68	XX	
1769	40	XIX	
1770	40	„	
1771	40	„	
1772	40	„	
1773	40	„	148
1776	56	„	122
1777	56	„	122
1780	56	„	
1781	56	„	
1782	56	„	
1784	80	„	
1788	80	„	
1789	80	„	
1790	80	„	
1792	124	„	
1793	124	„	123
1795	124	„	
1796	124	„	
1797	124	„	
1800	124	„	
1802	136	„	
1803	136	„	
1805	136	„	
1806	136	„	
1808	136	„	
1809	156	„	

1).	2).	3).	4).
1811	156	XIX	
1812	156	„	
1813	156	„	
1814	156	„	
1816	156	„	
1817	169	„	123
1820	169	„	
1822	169	„	
1824	169	„	
	16	XX	
1825	169	XIX	
1826	16	XX	
1829	16	„	
1830	16	„	
1831	16	„	
1832	28	„	
1833	28	„	
1835	28	„	
1836	28	„	
1838	28	„	
1841	28	„	
1842	44	„	
1843	44	„	
1844	44	„	
1846	44	„	
1847	44	„	
1849	44	„	
1850	56	„	
1851	56	„	134
1852	56	„	
1853	56	„	
1854	56	„	
1855	56	„	15
1856	56	„	15
1857	56	„	
1858	68	„	
1859	68	„	28
1860	68	„	
1861	68	„	
1862	68	„	
1865.	68	„	
1767.	28	XIX	
1866	80	XX	65
1867	80	„	65
1868	80	„	
1869	80	„	
1872	80	„	28
1873	80	„	
1874	92	„	
1875	92	„	53
1877	92	„	
1878	92	„	
1880.	92	„	
1646.	132	XVII	

1).	2).	3).	4).
1881	92	XX	
1882	104	„	
1885	104	„	134
1886	104	„	
1887	104	„	29
1888	104	„	53
1889	104	„	
1890	116	„	
1891	116	„	42
1892	116	„	65
1893	116	„	
1894	116	„	
1895	116	„	29
1896	116	„	30
1897	116	„	
1898	128	„	
1899	128	„	89
1900	128	„	
1901	128	„	
1902	128	„	90
1903	128	„	
1904	128	„	123
1905	128	„	
1906	140	„	
1907	140	„	
1908	140	„	
1909	140	„	
1910	140	„	
1911	140	„	
1912	140	„	
1913	140	„	
1914	157	„	
1915	157	„	
1916	157	„	124
1917	157	„	
1918	157	„	125
1919	157	„	
1920	157	„	
1921	157	„	
1922	12	XXI	
1923	12	„	
1924	12	„	
1925	12	„	
1926	12	„	
1927	12	„	
1928	12	„	
1930	12	„	
1931	24	„	114
1932	24	„	
1933	24	„	
1934	24	„	
1935	24	„	
1936	24	„	
1937	24	„	

1).	2).	3).	4).
1938	36	XXI.	
1939	36	„	
1940	36	„	
1941	36	„	
1942	36	„	
1943	36	„	
1944	36	„	
1945	36	„	
1946	48	„	
1947	48	„	
1948	48	„	135
1949	48	„	
1950	48	„	
1951	48	„	
1952	48	„	
1953	48	„	
1954	64	„	
1955	64	„	
1956	64	„	
1957	64	„	
1958	64	„	
1959	64	„	
1960	64	„	
1961	64	„	
1962	76	„	
1963	76	„	
1964	76	„	
1965	76	„	
1966	76	„	
1967	76	„	
1968	76	„	
1969	76	„	
1970	88	„	
1971	88	„	
1972	88	„	
1973	88	„	
1974	88	„	
1975	88	„	
1976	88	„	
1977	88	„	
1978	100	„	
1979	100	„	
1980	100	„	136
1981	100	„	
1982	100	„	
1983	100	„	
1984	100	„	
1985	100	„	149
1986	112	„	
1987	112	„	136
1988	112	„	137
1989	112	„	
1990	112	„	
1991	112	„	

1).	2).	3).	4).
1992	112	XXI	149
1993	112	„	137
1994	124	„	
1995	124	„	
1996	124	„	
1997	124	„	
1998	124	„	
1999	124	„	
2000	124	„	
2001	124	„	
2002	136	„	
2003	136	„	
2004	136	„	
2005	136	„	
2006	136	„	
2007	136	„	
2008	136	„	
2009	136	„	
2010	148	„	
2011	148	„	
2012	148	„	
2013	148	„	
2014	148	„	
2015	148	„	
2016	148	„	
2017	148	„	
2018	16	XXII	
2019	16	„	
2020	16	„	
2021	16	„	
2022	16	„	
2023	16	„	
2024	16	„	
2025	16	„	
2026	30	„	
2027	30	„	
2028	30	„	
2029	30	„	
2030	30	„	
2031	30	„	
2032	30	„	
2033	30	„	
2034	42	„	
2035	42	„	
2036	42	„	
2037	42	„	
2038	42	„	
2039	42	„	
2040	42	„	
2041	42	„	
2042	54	„	
2043	54	„	
2044	54	„	
2045	54	„	
2046	54	„	

1).	2).	3).	4).
2047 .	54 .	„	
2048 .	54 .	„	
2049 .	54 .	„	
2050 .	66 .	„	
2051 .	66 .	„	
2052 .	66 .	„	
2953 .	66 .	„	
2054 .	66 .	„	
2055 .	66 .	„	
2056 .	66 .	„	
2057 .	66 .	„	
2058 .	78 .	„	
2059 .	78 .	„	
2060 .	78 .	„	
2061 .	78 .	.	
2062 .	78 .	„	
2063 .	78 .	„	

1).	2).	3).	4).
2064 .	78 .	„	
2065 .	78 .	„	
2066 .	90 .	„	
2067 .	90 .	„	
2068 .	90 .	„	
2069 .	90 .	„	
2070 .	90 .	„	
2071 .	90 .	„	
2072 .	90 .	„	
2073 .	90 .	„	
2074 .	102 .	„	
2075 .	102 .	„	
2076 .	102 .	„	
2077 .	102 .	„	
2078 .	102 .	„	
2079 .	102 .	„	
2080 .	102 .	„	

1).	2).	3).	4)
2081 .	102 .	„	
2082 .	114 .	„	
2083 .	114 .	„	
2084 .	114 .	„	
2085 .	114 .	„	
2086 .	114 .	„	
2087 .	114 .	„	
2088 .	114 .	„	
2089 .	114 .	„	
2090 .	126 .	„	
2091 .	126 .	„	
2092 .	126 .	„	
2093 .	126 .	„	
2094 .	126 .	„	
2095 .	126 .	„	
2096 .	126 .	„	
2097 .	126 .	„	

1).	2).	3).	4).
2098 .	138	„	
2099 .	138 .	„	
2100 .	138 .	„	
2101 .	138 .	„	
2102 .	138 .	„	
2103 .	138 .	„	
2104 .	138 .	„	
2105 .	138 .	„	
2106 .	150 .	„	
2107 .	150 .	„	
2108 .	150 .	„	
2109 .	150 .	„	
2110 .	150 .	„	
2111 .	150 .	„	
2112 .	150 .	„	
2113 .	150 .	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

A. M., 76.
Abramescu N., 12, 15, 63, 44, 75, 97, 99, 118, 132, 133, 143, 147.
Adam D. R., 17.
Adamescu M., 17.
Alaci V., 1, 11, 12, 16, 17, 19, 28, 30, 31, 40, 42, 43, 50, 54, 55, 61, 66, 67, 68, 73, 74, 7ş, 79, 81, 88, 89, 90, 91, 97, 101, 102, 103, 106, 107, 113, 114, 115, 118, 119, 121, 126, 127, 133, 137, 138, 139, 144, 150.
Aldea V. M., 14, 15, 16, 29, 30, 53, 54, 90, 113, 121, 123, 134.
Alexa Maria, 50.
Alexa V., 50.
Almăjan P., 17.
Aman V. C., 134.
Amărăşteanu A., 100.
Amărăsteanu F. M., 41, 52, 88, 89.
Anastasescu M. M., 134.
Anastasiade I., 17.
Anastasiu M. M., 134.
Andonie S. M., 134.
Andrievici N., 13, 14, 65, 113, 121.
Andronescu P., 17, 27, 50, 74, 87, 110, 145, 147.
Andrunachievici A. V., 134.
Angelescu A., 28.
Angheluţă Th., 13, 17, 27, 50, 72, 73, 79, 99, 108, 145.
Aniţescu N. N., 13, 14, 66, 77, 122, 147.
Anton G. G., 15.
Anton I., 137.
Apostol R., 52, 134.
Ardelean R., 40.
Ardeleanu S., 17.
Arghir I., 17.
Arghiriade E., 145.
Aristeanu H., 113.
Atanasiu A. I., 38.
Augustin M., 14.

Babeţi T. C., 134.
Bădescu R., 17, 27, 38.
Baidaff B. I., 17.
Bakonyi C., 17.
Bakonyi C. C., 13, 14, 15, 16, 28, 29, 30, 42, 53, 54, 65, 77, 90, 102, 113, 114, 124, 125, 126, 134, 136, 138, 149, 150.
Bănărescu M., 17.
Barbilian D., 50, 87.
Bărglăzan A., 17.
Baron C., 17.
Becu C., 90.
Begu I. G., 101.
Belcot C., 38, 133.
Beldie D., 40.
Beneş P., 17.
Berinde T., 101, 134.
Bernoulli I., 24, 25, 26.
Bernoulii J., 24, 25.
Bianu B., 133.
Blaşian V., 17.
Bobârnac M., 17.
Boerescu G. P. 29, 136, 137.
Boeriu V., 100, 120, 146.
Boldescu B. P., 27, 30.
Boleanţu L., 16, 29, 30, 42, 65, 90, 125.
Bonea I., 17.
Borneas M., 113, 147.
Borş C., 12.
Botea G. N., 40, 145.
Botea E., 145.
Botez M., 16, 17, 30, 42, 62, 125, 147.
Botez M., 17.
Bouvaist R., 133.
Braeşter O., 40.
Brânceni I. B., 136.
Brânceni I. C., 136.
Bratu G., 13, 50, 87, 120.
Bucur N. V., 101.
Budeanu C., 133.
Buicliu Gh., 16, 17, 27, 30, 37, 40, 42, 54, 66, 75, 78, 90, 99, 100, 102, 110, 114, 120, 126, 132, 136, 138, 146, 150.
Bunescu A., 50, 74, 99.
Buznea D. D., 13, 14, 15, 77, 113, 134, 147.

Călinescu A., 126.
Călniceanu C. I., 17, 50.
Călugăreanu G., 17, 99.
Cândea C., 17.
Cârlan S. N., 53, 65, 123.
Cârstoiu I., 133.
Casanovici C., 38.
Catona V., 17.

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Cavallaro G. V., 12, 13, 87.
Cazanacli P. V., 41, 101, 113, 122, 149.
Cernat C., 120, 134.
Cernes A. M., 40.
Cernescu C. N., 133.
Cetăţeanu St., 13, 14, 15, 28, 77, 113, 122, 123, 134.
Checian N. Ana, 13, 14, 15, 16, 65, 90, 113, 134.
Chintescu M. M., 115.
Chircoiaşu V. N., 120, 133.
Chiria I. S., 88.
Chiriac I. S., 101.
Chiriţa D. C., 133.
Ciorănescu N., 133.
Claudian V., 17, 133.
Cliford, 99.
Coandă I. V., 146.
Coca A., 17.
Cocea G. T., 30.
Comani A., 17, 120.
Comănescu A., 17.
Comberousse Ch., 73.
Comloşan Cornelia, 113.
Constantinescu Gh., 17, 110.
Constantinescu G. G., 12, 17, 40, 75, 87.
Constantinescu I., 133.
Contrea A., 17.
Coşniţă C., 27, 75, 99, 120, 146.
Costăchescu V. C., 16, 17, 28, 54, 78, 90, 127, 140.
Costescu C., 101.
Crăciunescu I., 28.
Creţoiu P., 133.
Creţulescu C., 133.
Cristea I. V., 90.
CristescuD., 14, 134.
Cristescu I., 17.
Cristescu V., 63, 146.
Cristodulo N., 17.
Cservény I., 17.
Curea I., 17, 27, 90, 110.

Darboux, 74.
Dăscălescu H., 14, 148.
Dăscălescu St. H., 15, 78, 101, 113, 120, 121, 134, 147, 149.
Deheleanu G., 16, 29, 122, 123, 136, 137, 138.
Demetrescu G., 17.
Demian A., 27.
Deoancea N., 40.
Diaconescu D. I., 13, 14, 78, 102, 113, 134, 148.
Diaconescu M., 13, 121.
Diaconescu N., 17.
Diocles, 36.
Diofante, 25.
Dobrescu A., 63.
Dobrescu V. E., 16, 29, 90, 103, 125, 138.
Dobrescu D. P., 88.
Dobrozemsky M., 17.
Dorneanu S. V., 40.
Drăgan C., 38.
Drăghicescu P. P., 87.
Dragomir A., 14.
Dragon I. G., 14, 78, 113.
Drăgulescu C., 38, 50.
Duci E., 62.
Dumitriu-Dada, 17.

Emanuel D., 13.
Enache I., 134.
Enăchescu I., 28, 90, 123, 124, 136, 138, 150.
Euler, 76, 120.

Facsko I. G., 28, 54, 123.
Favard J., 99.
Fermat, 38.
Filip G. P., 114.
Florescu C. G., 29.
Florescu I. G., 54.
Florescu M., 17.
Florescu L. V., 101.
Focşăneanu M., 99.
Frătici I., 17.

Gaiu G. N., 63.
Gal T., 146.
Galbura G., 145.
Galilei G., 120.
Gâţă G. G., 136.
Georgescu B., 14, 15, 52.
Georgescu C. C., 133.
Georgescu D., 17.
Georgescu R., 87.
Gheorghiu A., 12, 87, 133.
Gheorghiu N. G., 27.
Gheorghiu Th. Gh. 13, 14, 15, 17, 38, 50, 77, 78, 99, 102.
Gheorghiu S. I., 133.
Gheorghiu S., 38, 133.
Gheorghiu V., 17.
Ghermănescu M., 12, 13, 14, 16, 17, 30, 38, 42, 50, 54, 61, 65, 66, 77, 78, 99, 102, 108, 115, 126, 133, 138.
Ghimuş A. D., 136.
Ghiocel N., 121.
Ghiţescu Sp., 17.
Gligor N. I., 13, 14, 15, 16, 28, 29, 30, 52, 54, 78, 90, 113, 114, 134, 136.
Gloden A., 13, 16, 17, 26, 29, 30, 37, 49, 52, 53, 54, 65, 113, 124, 134, 138, 143, 150.
Godea I., 136, 137.
Godeanu I. V., 88, 101.
Goga Fl., 16, 29, 42, 66, 90, 123, 126, 136, 149.
Goicu N., 27.
Gradin G., 40.
Grillet, 38.
Grozescu L., 136, 137.
Grumăzescu M., 14, 30, 138, 150.
Guţu I. A., 120.

Hadamard, 72.
Hadwiger, 99.
Herman I. C., 14, 88.
Herman V., 17.
Hompola I. T., 101.
l'Hospital, 24, 25, 26.
Hristea H., 17.
Huygens, 25.

Iacob C., 99.
Iacob S. E., 66.
Ieşan S. A., 114.
Ioachimescu G. A., 120, 133.
Ilie D. M., 133.
Iliescu M., 40.
Iliovici, 139.
Ionescu-Biss P. H., 17.
Ionescu-Bujor C., 17, 51, 63, 120, 145, 146.
Ionescu-Ţiu D. C., 17, 123.
Ionescu I., 12, 27, 38.
Ionescu-Muscel I., 38.
Ionescu P., 14.
Ionescu F. P., 14, 15, 16, 28, 29, 30, 42, 53, 54, 65, 90, 113, 114, 124, 134, 136, 137, 138, 150.
Ionescu-Pelican, 27.
Ionescu A. St., 40.
Ionescu D. T., 133.
Ionescu D. V., 12, 17, 99, 132, 144, 146.
Iorga N., 27.
Iosifescu C., 16, 29, 42, 125, 136, 137, 138.
Irimescu I., 38.
Ivănescu C., 17, 100, 120, 121.

Jidanu I. C., 13, 14, 15, 52, 101, 102, 113, 122, 134, 147, 148.
Jipescu N. N., 113.

Kielburger M., 17.
Kinsky I., 137.
Knopf H., 114, 150.
Kornis E., 113, 134.
Kovalewski, 139.
Kühn I., 17.

Lagrange, 49.
Lalescu T., 28.
Lambrino G., 17.
Lăpedatu A., 27.
Laplace, 75, 87.
Lascu Bal, 17, 27.
Lăţea C., 121.
Laţiu E., 133.
Laţiu V., 17.
Lebesque H., 13, 99.
Leibniz, 24, 25.
Leonida D., 17.
Lepădatu M., 40.
Lepolszky C., 113, 122.
Linteş I., 18, 27, 38, 87, 88, 99, 110, 133.

Lipschitz, 99.
Liteanu G., 18.
Logotătu I., 122.
Loria G., 24, 97, 99.
Loziciu-Vârşeţ, 150.
Luca H. I., 136.
Luca I. I., 14, 15, 16, 28, 29, 30, 54, 90, 113, 123, 124, 134, 138, 149, 150.
Luca L. L., 90, 114, 137.
Lupan A., 18.
Lupe I., 133.
Lupescu C., 13, 16, 28, 29, 30, 42, 54, 65, 88, 90, 101, 113, 121, 122 124, 134.
Lupescu Gh., 78.

Machedon D., 137.
Macovschi E., 18.
Mahreholz J., 50, 75, 76, 124, 125, 137, 150.
Maior A., 110.
Malaxa C. N., 134.
Mănescu M., 12.
Mang Ileana, 66, 125.
Mangeron I. D., 12.
Manolache Elena, 52, 101.
Manolache C. M., 29, 54, 66, 90, 114, 125, 137.
Manughevici C., 18.
Marcuzon L., 134.
Mărculescu O., 18.
Mardari D., 18.
Margulius M., 146.
Mărgărit N., 149.
Mărgineanu I., 134.
Marian V., 27, 74.
Marica I. H., 101.
Marinescu G. M., 133.
Marinescu I., 18.
Maşcaş G. P., 101.
Mateescu C., 133.
Mateescu S., 18.
Matei I. A., 14, 102, 113, 147.
Matei D. D., 101, 113, 134.
Maties V. I., 54.
Mavrodineanu R., 38.
Mecu M., 120.
Mehedinţi D., 28, 51.
Mereuţă E., 18.
Mihalcea V., 101.
Mihăileanu C. A., 14.
Mihăleanu N. N., 12, 13, 18, 28, 40, 51, 64, 75, 100, 120.
Mihaluc I. I., 137.
Mihu N., 134.
Milu I. N., 101.
Minea A., 148.
Mioc V., 18, 159.
Miquel, 64.
Mironescu I. D., 14, 113.
Modâlcă G. D., 13.
Modâlcă S. E., 14, 113, 134, 135, 147, 148, 149.
Moessner A., 38, 61, 75, 87, 102.
Moise I. G., 101.
Moldovan T., 16, 123.
Moldoveanu C., 14.
de Montmorti R., 24.
Morariu M. I., 30, 137.
Motăş C., 134.
Motoc D. M., 146.
Mureşan I. O., 14, 113, 147.
Murgu V. M., 52, 113, 134.
Murgulescu Elena, 18.
Murgulescu G. I., 18, 38, 50, 99, 133.
Musca M. M., 113.
Musta S., 18, 144.
Myller A., 12.

N. A., 28, 121.
Nadaşan S., 1, 18, 19, 31, 55, 67, 79, 91, 103, 115.
Naneş Cornelia, 89, 124, 137.
Naneş G., 18.
Năsturaş D., 28.
Negrea A. M., 15, 16, 29, 30, 41, 52, 54, 78, 88, 90, 101, 113, 124, 134, 146.
Negrea M., 14.
Negulescu S., 101.
Newton, 25.
Nicolau A., 18, 63.
Nicolau P., 18.
Niculescu V. A., 63.
Novacu V., 27.

Ogrin N., 18.
Onicescu O., 18, 120.
Orăşanu C., 18.
Orăşanu G., 18.
Ostaşco Al., 133.

Păduraru, 133.
Palama G., 62.
Panait M., 101.
Panaitescu Sc., 99.
Pantazi A., 120.
Papadopol D. Elena, 13, 14, 114, 121.
Pappus, 12.
Parapeanu I., 146.
Pascal, 12, 87.
Pasco W., 40.
Patriciu V., 18.
Pavel D., 38, 133.
Pavlovschi G., 38.
Papolszky C., 14.
Petian G., 99.
Petrescu A., 18.
Petrescu C. A., 134.
Petrescu An., 101.
Petrescu P. B., 134.
Petrescu G., 133.
Petrescu R. G., 16, 28.
Petrescu I., 38.
Picard E., 13, 99.
Pitagora, 79.
Pitulescu G., 114.
Pleşa M., 137.
Pompeiu D., 38, 67, 72, 73, 74, 75, 79, 99, 118, 132, 133, 139, 143.
Pompeiu M., 41, 88.
Popescu I. A., 13, 15, 29, 30, 52, **53**, 54, 66, 78, 90, 102, 113, 123, 124, 126, 134, 137, 138, 150.
Popescu C., 66, 122, 123.
Popescu N. C., 15, 18, 149.
Popescu E., 18.
Popescu V. F., 134.
Popescu I., 18.
Popescu N. Maria, 89.
Popescu-Zorica N. A., 13, 134.
Pop L., 100, 120, 146.
Pop N. I., 146.
Popa D. M., 77, 113.
Popa N., 41, 52, 120, 121.
Popovici I. G., 41, 134.
Popovici T. I., 40.
Popovici M., 134.
Porumbescu I. D., 134.
Postelnicescu C. M., 28.
Preda I. D. 136, 150.
Predoescu I. M., 18, 28, 41, 88.
Predoiu F., 120, 146.
Precopiescu M., 51.
Protopopescu I., 18.
Ptolemeu, 72, 79.
Purcariu I., 18.
Purcel Ar., 146.

Racliş R., 18.
Radoslav G. I., 15, 16, 28, 29, 53, 134.
Rădulescu G. O., 134.
Răduleţ R., 18.
Râmniceanu L. R., 40.
Reischer L. H., 122, 134.
Ripianu A., 65, 113, 147.
Rizescu I., 90, 126, 150.
Rohr I. A., 77, 113.
Roibănescu C., 18.
Rolle, 56, 63.
Rosenblatt M., 134.
Rosenberg I., 88, 101.
Rosenstein B., 137.
Roşculeţ N. M., 12.
Roşca St. G., 146.
Roşu A. A., 38.
Roth I. A., 134.
Rouché, 73.

Sabău C. 137.
Saegin V. C., 14, 113.
Şandor V., 14, 113.
Săndulescu I. I., 28, 51, 120, 121.
Săruleşteanu M., 16, 29, 66, 77, 90, 124, 134.
Sauciuc L., 18.
Saurin, 63.
Savin C. I., 18.
Savin Maria, 41.
Scărlătescu D., 18.
Schapira S., 16, 29, 30, 42, 90, 123.
Schileru I., 18, 64.
Schram Edith, 18.
Scorpan Al., 18.
Segal Zigu, 102, 113, 147, 148.
Segal Zoe, 113, 134, 147.
Selmereanu H., 14, 113.

Şerban C. C., 77.
Şerban I. C., 78, 147, 148.
Şerban Gh., 145.
Sergescu P., 13, 18, 24, 27, 38, 63, 120.
Severineanu C., 18.
Sfinţescu I. C., 133.
Sibiriani F., 62.
Simionescu D. G., 12, 18.
Simionov K., 40.
Simon S. P., 15, 16, 29, 30, 42, 53 54, 65, 66, 134, 149.
Simson, 64.
Sipos E., 78, 90, 102, 114, 120, 136, 138.
Slavov I., 15, 113.
Sluşanschi H., 27.
Sluse, 46.
Smighelschi O., 18.
Soceanu E., 113.
Socolescu T. T., 38.
Solacolu S., 38.
Solomon I., 122, 134.
Staicu C., 137.
Staicu D. I., 38.
Staicu I. N., 13, 14, 15.
Stamate I. I., 13, 14, 15, 42, 53, 102, 113, 114, 123, 136, 145, 147, 148.
Stamatescu I., 18.
Stambuleanu A., 18.
Stan A., 18, 145.
Stănescu C., 18.
Stănescu E., 28.
Stantzel E., 18.
Ştefănescu A., 120, 146.
Ştefănescu F. M., 13, 39, 78, 113, 147, 148.
Ştefănescu D. N., 101, 134.
Ştefanovici I. M., 29, 30.
Stewart, 118, 119.
Steope A., 13, 38.
Stoenescu A., 87.
Stoenescu D. M., 13, 14, 15, 52, 77, 101, 113, 122, 134.
Stoica D., 38, 74, 146.
Stoicescu L., 18.
Stoicescu M., 18.
Stoilov S., 99.
Suhăţeanu V. B., 14, 15, 78.
Süli M., 120, 121, 146.

Tănăsescu T., 133.
Tarczenski A., 137.
Tătaru Al., 14, 113.
Tătaş V., 40.
Ţarălungă S., 28, 53, 65, 90, 114, 123 126, 137.
Teixeira G., 32, 33, 48, 56, 58.
Teodosiu A., 18, 133.
Teodorescu C., 18, 133.
Teodorescu D., 38, 88.
Thébault V., 16, 42, 78, 87, 102, 133.
Theodor N. D., 15.
Theodorescu N. D., 77, 113, 134, 148.
Tică P. M. Gal, 29, 30, 52, 54, 114, 120, 121, 134.
Ţigoiu I., 40.
Tilică C. S., 14, 15, 28, 52, 53, 54, 102, 113, 122, 134, 147, 148.
Ţino N. O., 8, 18, 74, 97, 98, 116.
Tipei N., 133.
Ţiţeica G., 10, 11, 74.
Ţiţeica Gabriela, 38, 63, 120, 145.
Ţiţeica I. I., 28.
Topolescu G., 14, 113.
Toporescu R., 133.
Toscano L., 13.
Trofimov P., 75.
Turcu R. S., 77, 113.

Văduva F. M., 14, 16, 65.
Vâlcovci V., 18.
Vandermond, 12.
Vasile V., 147.
Vasilescu-Karpen N., 38, 133.
Vasiliu A., 27.
Vasiliu D., 14, 29, 90, 113, 124.
Vasiliu G. O., 16, 30, 42, 53, 54, 123.
Venter D., 14, 78, 102, 113, 147.
Vijelie Gh. E., 149.
Vernescu V. N., 87.
Viciu A., 18.
Vicol I. A., 125, 137.
Viète F., 27.
Vijelie G. E., 14, 15.
Vişa E., 11, 12, 18, 59, 78, 87, 134, 138.
Vlad M. C. I., 113, 133.
Vlad I. V., 18.
Vlădea I., 40.
Vlădescu I., 18.
Voinescu V., 127.
Voronca H., 29, 30, 42.
Voştinariu G., 16.

Weber M., 126.
Wegener E., 16, 54, 66, 90, 114, 123, 124, 125, 126, 136, 137, 138, 149, 150.

Zagaican I., 101.
Zăgănescu I., 18.
Zaharia N. O., 18.
Zamfir D., 146.
Zamfirescu G., 38.
Zapan G., 18.

Nota redacţiei. Tabla de materii a fost întocmită de d-l Profesor *Vasile Mioc*, asistent la Şcoala Politehnică şi Director la lic. Diaconovici Loga, căruia îi aducem vii mulţumiri.

Costul abonamentului la „Revista Matematică din Timişoara", pentru anul XXIII (1 Martie 1943—1 Martie 1944), este de 250. (două sute cincizeci lei). Un număr 30 lei.

Rugăm pe corespondenţii noştri a ne trimite din timp costul abonamentului pentru a nu intrerupe expedierea.

Manuscrise primite de la corespondenţii noştrii până la 10 a lunei curente şi anume: Articole (A), Note (N), probleme propuse (P) şi probleme rezolvate indicate prin numărul lor de ordine.

Bakonyi C. (1965, 1979, 1984, 1987, 1993, 1995, 1996, 1998, 1999, 2000, 2008, 2013); **Barbu Virgil** (1938, 2018, 2019, 2020, 2021, 2023, 2028, 2029, 2030, 2031); **Bitang A.** (2005, 2019, 2021, 2023, 2025, 2031, 2033, 2037, 2038, 2039, 2046, 2047, 2048, 2049, 2063, 2068, 2069, 2071, 2073, 2074, 2076, 2081, 2084, 2085, 2088, 2093, 2094, 2096, 2098, 2101); **Chiriac C.** (S.-Lt.). (2018, 2019, 2020, 2021, 2023, 2028, 2030, 2034, 2036, 2041, 2043, 2045, 2048, 2050, 2052, 2054, 2057, 2066, 2067, 2069, 2071, 2073, 2076, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2088, 2098); **Colcsnic I. D-tru** (2083, 2103); **Creţa G.** (2006, 2014, 2025, 2029, 2041, 2049, 2054, 2057, 2060, 2062, 2073, 2074, 2076, 2079, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2094, 2098, 2101); **Deme Gh.** (2030, 2098); **Gâţă Gh.** (P., 1955, 1979, 2013, 2052, 2057, 2060, 2082, 2083, 2088); **Godea I.** (1668, 1674, 1833, 1906, 2098); **Ieşan Şt. Alexandru** (2076, 2082, 2083, 2088); **Ionescu F. Petre** (P., 1574, 2082, 2083, 2084, 2086, 2087, 2088, 2097); **Iosifescu Cicerone** (2076, 2087, 2088, 2098); **Knopf H.** (A., P., 2057); **Jung Ladislau** (2094); **Luca I. Ioan** (P., 1933, 1955, 1969, 1979, 2020, 2028, 2036, 2041, 2054, 2071, 2076, 2086, 2088, 2097; **Mesch Iosef** (P., 2038, 2048, 2057, 2060 .2071, 2086, 2087 2088, 2098); **Olteanu Gr. Ioan** (2018, 2036, 2038, 2043, 2048, 2052, 2060 ,2073, 2082, 2086, 2087, 2094); **Pat Moise** (1956, 1989, 2020, 2021, 2028, 2029, 2030, 2036, 2043, 2052, 2054, 2061, 2071, 2082, 2083, 2085, 2087, 2088); **Popescu Adrian** (2068, 2086, 2097); **Rădulescu Gh. Ştefan** (2033); **Sabău Mihai** (1933, 2029, 2030, 2043, 2054, 2059, 2060, 2071, 2076, 2083, 2085, 2088); **Tarţa Valeria** (2085, 2088); **Teodorescu A. Alexandru** (2098); **Tărău Gheorghe** (2057); **Wegener Eugen** (P., 1764, 1790, 1862, 2007, 2060); **Wigh Jean** (2086).

INFORMAŢIUNI

BOLETIN MATEMATICO

FONDÉ EN 1928.

Il s'agit de la plus ancienne revue mathématique de l'hémisphère austral qui apparait à Buenos Aires et dont les collaborations se publient en Allemand, Anglais, Espagnol, Français, Italien et Portugais.

Pendant les douze années on publié 320 articles, 273 notes et 1961 problèmes proposés.

L'apparition se fait par quinzaine depuis mars et jusqu'à décembre.

L'abonnement spécial pour les abonnés de la REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA est de 200 Lei, et doit être envoyé à l'Administration de cette revue

Pentru BOLETIN MATEMATICO anul XIV, s'au primit la Redacţia „R. M. T." până acum, următoarele abonamente:

1. *Petre Sergescu,* prof. Universitar, Str. Milano 12, Timişoara.
2. *Corneliu N. Popescu*, profesor, Str. Piscului 6, Bucureşti V.
3. *Eugen V. Dobrescu,* elev, Strada Petru Rareş No. 41, Piatra-Neamţ,
4. *Dr. Mihail Şt. Botez,* Strada Emanoil Albu 12, Piatra Neamţ.

În prezent „*Boletin Matematico*", nu îl primim.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţii, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Legându-se colecţiile R. M. T., anii I—XXI, în volume şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 20 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU